Euclides

816
35
492

jaargang 69 1993 | 1994 april

● Euclides ● ● ● ●

Redactie

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 9 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter Dr. J. van Lint, Spiekerbrink 25, 8034 RA Zwolle, tel. 038-539985.
Secretaris Drs. J.W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag.
Ledenadministratie F.F.J. Gaillard, Jorisstraat 43, 4834 VC Breda, tel. 076-65 32 18; fax. 076-65 32 18.
Giro: 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt *f* 60,00 per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. *f* 42,50; contributie zonder Euclides *f* 35,00.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de ledenadministratie.
Opzeggingen vóór 1 juli.

Advertenties

Advertenties zenden aan:
ACQUI' MEDIA, Postbus 2776, 6030 AB Nederweert.
Tel. 04951-2 65 95. Fax. 04951-2 60 95.

Artikelen/mededelingen

Artikelen en mededelingen worden in drievoud ingewacht bij drs. M.C. van Hoorn, Noordersingel 12, 9901 BP Appingedam. Zij dienen machinaal geschreven te zijn en bij voorkeur te voldoen aan:
- ruime marge
- regelafstand van 1,5
- maximaal 47 aanslagen per regel
- eenzijdig beschreven papier
- met de tekst bijgeleverd op diskette (3,5 of 5,25 inch) in WP 5.1, of eventueel in ASCII-files

en liefst voorzien te zijn van (genummerde) illustraties
- die gescheiden zijn van de tekst
- aangeleverd in zo origineel mogelijke vorm
- waar nodig voorzien van bijschriften

De ruimte die een artikel of mededeling bij plaatsing in beslag neemt kan worden bepaald door uit te gaan van 48 tekstregels per kolom bij een kolomhoogte van 20 cm; aan de hand hiervan kan ook het ruimtebeslag van illustraties worden bepaald.
De auteur van een geplaatst artikel ontvangt kosteloos 2 exemplaren van het nummer waarin het artikel is opgenomen.

Abonnementen niet-leden

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 66,00. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement *f* 43,00.
Niet-leden kunnen zich abonneren bij:
WoltersgroepGroningen b.v., afd. Verkoopadministratie, Postbus 567, 9700 AN Groningen, tel. 050-22 68 86.
ABN-AMRO 44 60 67 105.
Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgiro hebben ontvangen.
Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.
Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.
Losse nummers *f* 11,50 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

ISSN 01.65-0394

Inhoud



Fermat

► Studiedag en jaarvergadering

Victor Schmidt

'De basis gevormd ... en dan?' dat bleek een vraag die ongeveer tweehonderd leraren wiskunde voldoende relevant achtten om op zaterdag 13 november jongstleden de jaarlijkse studiedag van de NVvW te bezoeken. De studiedag had vooral betrekking op de invoeringsproblematiek van het nieuwe leerplan wiskunde in de onderbouw. Tevens zou er aandacht zijn voor de uitstraling van dat leerplan naar andere onderwijssectoren zoals bovenbouw en vervolgopleidingen.
De organisatie van de dag was in handen gegeven van het APS. De deelnemers werden verwelkomd met informatie over de faciliteiten die het APS biedt ten aanzien van nascholing. Ook werd hen een publikatie van de vereniging en het APS met als titel 'Bladeren in de nieuwe schoolboeken wiskunde' ter hand gesteld.

Huishoudelijk gedeelte

De vorm van de dag was als vanouds. Ook dit jaar had het bestuur het Nieuwe Lyceum in Bilthoven gekozen als plaats van handeling. Er waren twee sprekers ingehuurd en er was een elftal werkgroepen gevormd. De dag zou beginnen en eindigen met de statutaire jaarvergadering van de vereniging. De jaarrede* van voorzitter Van Lint vormt een mo-



Voorzitter van Lint spreekt de jaarrede uit



Hans Wisbrun verdedigt zijn amendement

ment van terug- en vooruitzien in het verenigingsjaar. De voorzitter memoreert een aantal gebeurtenissen van het afgelopen jaar en spreekt voornemens van het nieuwe bestuur uit. Zo zal de NVvW zich het komend jaar nadrukkelijk bezig houden met problemen rond de invoering van de basisvorming.

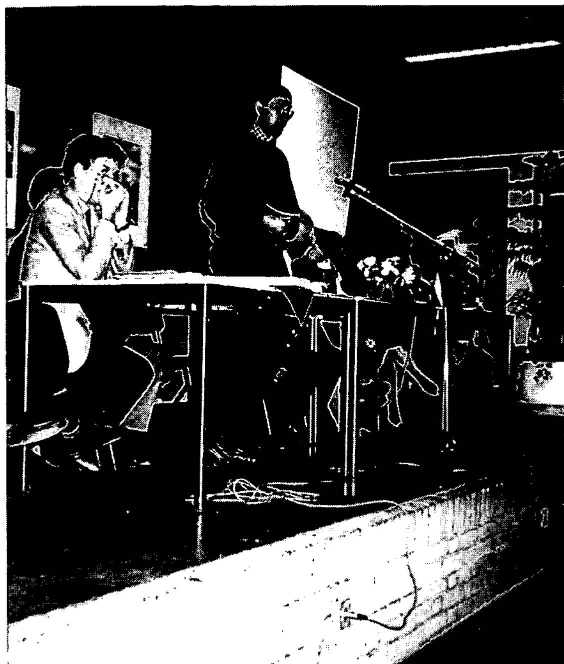
Discussie ontstond naar aanleiding van de oproep 'Wij eisen contributieverhoging' (zie Euclides nummer 3). De opstellers bleken de oproep als amendement te beschouwen bij het bestuursvoorstel de contributie volgend jaar te verhogen. Na enig heen en weer gepraat werd besloten aan het einde van de dag de leden een compromis voor te leggen tussen bestuursvoorstel en amendement.



Stemming over amendement Wisbrun

Werkgroepen

Het organisatiecomité had voor een ruime keuze aan werkgroepen gezorgd. In de meeste werkgroepen kwam een aspect van de invoering van het nieuwe leerplan aan de orde. Actueel was de werkgroep onder leiding van Boertien van het Cito over de afsluiting van de basisvorming. Er werden voorbeelden getoond van mogelijke toetsen. Tevens deed Boertien kond van het systeem waarin alle leerlingen drie toetsen van elk een uur en opklimmend qua moeilijkheidsgraad worden aangeboden. Ook maakte hij melding van het feit dat er een getuigschrift komt, mogelijk voorzien van een cijferscorelijst.



Bert Zwaneveld over het nieuwe Euclides

Kees Hoogland had de leiding over een werkgroep die de algebralijn tot onderwerp had. Hij betoogde hoe de algebralijn door het hele voortgezet onderwijs loopt en zou moeten lopen. Kern van zijn betoog was dat algebraïsche vaardigheden niet los van de analyse (bijvoorbeeld het functiebegrip) geleerd moesten worden. In de discussie achteraf uitte een deelnemer haar zorg over de aansluiting van het nieuwe leerplan op dit gebied met het overige wiskunde-onderwijs. Andere deelnemers bleken het met haar eens te zijn. In de middageditie bleef de discussie wat uit, mede omdat de werkgroep toen bezocht werd door een aantal professionals op het gebied van leerplanontwikkeling. Jammer.

Veel positieve reacties waren te horen na afloop van de werkgroep van prof. Does. Deze inleider hield een verhaal over de beheersing van produktieprocessen met behulp van statistische technieken. Zulke technieken worden overal ter wereld gebruikt, zoals in de auto-industrie en in de procesindustrie. Simpelweg door goed te kijken blijkt het mogelijk flink te besparen.



In welke lokalen moet ik zijn?

Wiskunde B in het vwo

De zitting van de werkgroep Wiskunde B in het vwo had veel weg van een hearing. De herzieningscommissie onder leiding van De Lange bood de gelegenheid mee te denken over aanpassingen van het examenprogramma wiskunde B. Daar bleek ruime belangstelling voòr te zijn. De Lange gaf resultaten van een onder vwo-docenten wiskunde gehouden enquête. Tevens wist hij een aantal nieuwigheden over de doorstroomprofielen in het vwo en de plaats van de wiskundevakken in elk van de profielen te noemen.
De aanwezigen werd gevraagd welke problemen ze ervaren met het huidige B-programma. Genoemd werden het overladen karakter van het curriculum, het feit dat (te) veel leerlingen het vak kiezen, de onduidelijke afbakening van de ruimtemeetkunde en het onderwerp differentiaalvergelijkingen als zodanig. Wensen werden geuit op het terrein van hulpmiddelen als de grafische rekenmachine en een simpel formuleblad op het examen. Differentiaalvergelijkingen zouden òf niet, òf beter, bijvoorbeeld aan de hand van toepassingen behandeld moeten worden. Als mogelijke nieuwe onderwerpen werden numerieke wiskunde, geschiedenis van de wiskunde en discrete wiskunde genoemd.

Voordrachten

De sessies in de werkgroepen werden afgewisseld met spreekbeurten van Aad Goddijn van het Freudenthal instituut en Hans Pouw van het APS. De eerste spreker hield een betoog over meetkunde in de basisvorming. Aan de hand van leerboeken, proefexamens en het historisch archief gaf Goddijn zijn gehoor een beeld van de meetkunde in het nieuwe curriculum. De voordracht was bijzonder onderhoudend, hoewel de actualiteitswaarde van de inhoud te wensen overliet.
Hans Pouw vond 'de basisvorming af' en vroeg zich af 'wat nu?'. Voor leerplanontwikkelaars is het pauze; de kloof tussen het realistisch rekenen in de basisschool en HEWET en HAWEX in de bovenbouw is door het nieuwe programma overbrugd. Voor docenten begint het werk nu pas. Het projectteam invoering basisvorming zal evenmin stil zitten. De problematiek van de afsluitende toetsen dient bevredigend opgelost te worden, leerboekauteurs verdienen begeleiding en ondersteuning, de aansluiting met de bovenbouw moet aandacht krijgen en er moet over de invulling van het individueel beroepsonderwijs worden nagedacht.
Veel werk moet er in de scholen worden verricht. De scholen, en daarbinnen de vaksecties, zijn verantwoordelijk voor de invoering van de basisvorming. Daartoe krijgt elke school een nascholingsbudget van *f* 700 per voltijds personeelslid. Met een gedeelte van dit budget kan een vaksectie nascholing op maat kopen.

Rondkijken

De lunchpauze was aan de korte kant. Er was gelegenheid tot het bezichtigen van de winnende bijdrage van de didactiekprijsvraag, die door de NVvW en de NVORWO jaarlijks wordt uitgeschreven. De helaas enige inzenders hadden een spel bedacht waarin in een soort ganzebord elementen verzameld

moeten worden, waarmee een ruimtelijke figuur van tekening af gebouwd kan worden. De bouwelementen worden uitgekeerd na beantwoording van een vraag. De vakjury vond het spel fraai van uitvoering. Ook bood het ruimte aan de spelleider de regels aan te passen en uit te breiden.



Prijsuitreiking metselspel

De informatiemarkt werd bevolkt door educatieve uitgevers, producenten van elektronica en organisaties die nascholing aanbieden. In een hoekje stond een aantal fraaie meetkundige modellen, die door een werkproject uit Amsterdam op de markt gebracht worden.

Uw correspondent was erg enthousiast over het op de studiedag uitgebrachte softwarepakket PC-Grafiek. Dit pakket wordt onder auspiciën van de vereniging de leden aangeboden tegen een geringe vergoeding van *f* 15,00 + *f* 2,50 aanmaakkosten. Een aanrader.

Conclusie

Op de terugreis naar huis is er ruimte voor een evaluatie van de dag. Twee gedachten dringen zich bij mij op. Enerzijds was de studiedag erg onderhoudend en geanimeerd. De organisatie stak, zoals elk jaar, goed in elkaar. Anderzijds beginnen de studiedagen steeds meer op elkaar te lijken. Dat betreft niet zozeer de vorm, maar met name ook de inhoud. De vereniging biedt professionals op het gebied van leerplanontwikkeling of -begeleiding op zo'n dag alle en misschien zelfs te veel ruimte. Zelf beperkt ze zich tot het beschikbaar stellen van tijd, geld en een podium. Het ware te overwegen om in de toekomst de studiedag te gebruiken om over één of meer thema's een verenigingsstandpunt in te nemen. Dat daarbij een beroep wordt gedaan op de genoemde professionals ligt voor de hand. Hun bijdragen zullen dan echter, meer dan het vertonen van eigen kunnen, uitgangspunt van discussie zijn.

* Zie bladzijde 220

▶ Joop van Dormolen emigreert

Bert Zwaneveld

In de loop van 1994 zal Joop van Dormolen, de huidige nestor van de didactiek van de wiskunde, met zijn vrouw zich metterwoon in Israel vestigen. Op 28 januari namen zijn Nederlandse collega's, vakdidactici, bestuur NVvW, leden van de Samenwerkingsgroep, medewerkers van het Freudenthal instituut en mede-auteurs afscheid van hem.
De redactie van Euclides sluit zich graag aan bij de die avond veel gehoorde wens: Joop, het ga je goed en in ieder geval tot ziens.

● Bijdrage ● ● ● ●

▶ Een boeiende vraag (II)*

F. van der Blij

In de brief van de heer Maas werd opgemerkt dat de kettingbreuk, die we in het eerste artikel bestudeerden, iets te maken had met de differentievergelijking: $t(k) = -1 + \dfrac{1}{k \cdot t(k-1)}$

We vroegen u al om bij verschillende beginwaarden voor $t(0)$ met rekenmachine of computer een aantal termen $t(k)$ uit te rekenen. Ik vermoed dat u wel ontdekt heeft dat voor enkele ongelukkig gekozen beginwaarden het proces stopt omdat we op een deling door nul stuiten. Maar voor andere beginwaarden nadert de rij $t(k)$ snel tot -1.

Dit verbaast ons niet want als de rij $t(k)$ een limiet τ heeft moet, omdat

$$t(k) \cdot t(k-1) + t(k-1) = \frac{1}{k}$$

gelden:

$\tau^2 + \tau = 0$

en dus

$\tau = 0$ of $\tau = -1$.

We merken op dat als zekere $t(k)$ negatief is de volgende $t(k+1)$ kleiner dan -1 is zodat na een negatieve term alle volgende termen kleiner dan -1 zijn, en als er een limiet bestaat deze dus -1 moet zijn.

We vragen ons af of het voor kan komen dat alle termen positief zijn, en of er een beginwaarde te vinden is zodat de limiet 0 wordt.

Dit dringt vooral als we ons realiseren wat het verband van deze differentievergelijking met de kettingbreuk uit het vorige artikel is.

Daarom daar eerst iets over.

We bewezen in het vorige artikel dat de kettingbreuk

$$\cfrac{1}{1 + \cfrac{\frac{1}{2}}{1 + \cfrac{\frac{1}{3}}{1 + \cfrac{\frac{1}{4}}{1 + \dots}}}}$$

de waarde e - 2 heeft.

Stellen we nu

$$t(k-1) = \cfrac{\frac{1}{k}}{1 + \cfrac{\frac{1}{k+1}}{1 + \dots}}$$

dan geldt

$$t(k-1) = \frac{\frac{1}{k}}{1 + t(k)}$$

en dit is juist de bovengenoemde differentievergelijking.

Het aardige is dat we direct zien dat alle $t(k)$ in dit geval positief zijn en dat de limiet van de rij $t(k)$ gelijk aan 0 is.

Daarbij is de beginwaarde $t(0)$ bij de differentievergelijking dus juist de waarde van de kettingbreuk. Er is dus wel degelijk een beginwaarde $t(0)$ te vinden zodat de rij $t(k)$ tot nul nadert! Aardig is het om nu direct met de rekenapparatuur het verloop van de rij na beginwaarde

$t(0)$ = e - 2 = 0.718281818459 te onderzoeken.

We vinden:

$t(1)$ = 0.3922111912

.....

$t(12)$ = 0.0745774903

$t(13)$ = 0.0314516699

$t(14)$ = 1.271058153

$t(15)$ = - 0.9475502623

$t(16)$ = - 1.065959562

$t(17)$ = - 1.055183641

.....

en nu nadert $t(k)$ snel naar -1. Wellicht heeft u, dit controlerend, heel andere waarden voor de getallen $t(k)$ gevonden. Het zijn namelijk de afrondfouten die dit alles veroorzaken, die willen nog al eens verschillen per machine. Maar ook in uw geval zal de rij $t(k)$ tot -1 naderen. Dan maar even anders te werk gaan, we starten met $t(0) = p$ en onderzoeken voor welke waarde van p de termen positief blijven.

$t(1) = \frac{1-p}{p}$ $\quad t(1) > 0$ voor $0 < p < 1$

$t(2) = \frac{3p-2}{2p-2}$ $\quad t(2) > 0$ voor $\frac{2}{3} < p < 1$

$t(3) = \frac{8-11p}{9p-6}$ $\quad t(3) > 0$ voor $\frac{2}{3} < p < \frac{8}{11}$

$t(4) = \frac{53p-38}{32-44p}$ $\quad t(4) > 0$ voor $\frac{38}{53} < p < \frac{8}{11}$

$t(5) = \frac{222-309p}{265p-190}$ $\quad t(5) > 0$ voor $\frac{38}{53} < p < \frac{222}{309}$

$t(6) = \frac{2119p-1522}{1332-1854p}$ $\quad t(6) > 0$ voor $\frac{1522}{2119} < p < \frac{222}{309}$

$t(7) = \frac{11986-16687p}{14833p-10654}$ $\quad t(7) > 0$ voor $\frac{1522}{2119} < p < \frac{11986}{16687}$

We merken terloops even op dat

$$\frac{1522}{2119} = 0.718263\ldots \text{ en } \frac{11986}{16687} = 0.718283\ldots$$

Dit verbaast ons niet, e - 2 is immers de kritieke waarde.
We willen de differentievergelijking nu exact oplossen voor iedere beginwaarde p.
Uit

$t(k) = -1 + \frac{1}{k \cdot t(k-1)}$ komen we tot het vermoeden dat

$$-1 - \frac{1}{k} = -\frac{k+1}{k}$$

een oplossing zou kunnen zijn; deze is bijna goed. Even bijstellen geeft dat

$$t(k) = -\frac{k+2}{k+1}$$

een exacte oplossing is. Deze hoort bij beginwaarde $t(0) = -2$ en heeft de eigenschap

$$\lim_{k\to\infty} t(k) = -1.$$

We proberen nu een oplossing van de gedaante $t(k) = -\frac{k+2}{k+1} + \varepsilon(k)$ te vinden.
Invullen geeft ons de relatie

$$\left[-\frac{k+2}{k+1} + \varepsilon(k) + 1\right]\cdot\left[-\frac{k+1}{k} + \varepsilon(k-1)\right] = \frac{1}{k}$$

en dus

$$\frac{k+1}{k}\varepsilon(k) + \frac{1}{k+1}\varepsilon(k-1) = \varepsilon(k)\cdot\varepsilon(k-1).$$

Opnieuw een niet-lineaire differentievergelijking. Maar met een kleine kunstgreep kunnen we overgaan op een lineaire vergelijking. Schrijven we namelijk

$$\varepsilon(k) = \frac{1}{\delta(k)}$$

dan zien we dat $\delta(k)$ voldoet aan:

$$\frac{k+1}{k}\delta(k-1) + \frac{1}{k+1}\delta(k) = 1.$$

We herinneren ons iets van lineaire differentiaalvergelijkingen en gaan eerst de homogene vergelijking oplossen.
Van

$$\frac{1}{k+1}\delta(k) = -\frac{k+1}{k}\delta(k-1)$$

is

$$(-1)^k\cdot(k+1)\cdot(k+1)!\cdot C$$

de oplossing. We passen nu het principe van variatie van constanten toe en zoeken van

$$\frac{1}{k+1}\delta(k) = -\frac{k+1}{k}\delta(k-1) + 1$$

een oplossing van de vorm

$(-1)^k\cdot(k+1)\cdot(k+1)!\cdot\rho(k)$.
Substitutie voert tot

$$\rho(k) - \rho(k-1) = \frac{(-1)^k}{(k+1)!}$$

en dus

$$\rho(k) = -\sum_{t=2}^{k+1}\frac{(-1)^t}{t!} + \rho(0).$$

We vinden dus als oplossing van de differentievergelijking

$$t(k) = -\frac{k+2}{k+1} + \frac{(-1)^k}{(k+1)(k+1)!}\cdot\left[-\sum_{t=2}^{k+1}\frac{(-1)^t}{t!} + \rho(0)\right]^{-1},$$

met een constante die we kunnen bepalen door een beginwaarde voor de rij te kiezen.

Bij beginwaarde $t(0) = p$ hoort

$$\rho(0) = \frac{1}{p+2}.$$

We zien dat voor alle k de beginwaarde

$$p = -2 + \left[\sum_{t=2}^{k+1} \frac{(-1)^t}{t!}\right]^{-1}$$

tot een rij voert die onderweg afbreekt omdat we op een deling door nul stuiten.
Voor andere beginwaarden ongelijk aan

$$-2 + \left[\sum_{t=2}^{\infty} \frac{(-1)^t}{t!}\right]^{-1}$$

geldt dat de rij $t(k)$ de limiet -1 heeft.
Voor beginwaarde

$$t(0) = -2 + \left[\sum_{t=2}^{\infty} \frac{(-1)^t}{t!}\right]^{-1} = -2 + e$$

is het moeilijker te zien wat er gebeurt. We vullen voor $\rho(0)$ nu in

$$\frac{1}{p+2} = \sum_{t=2}^{\infty} \frac{(-1)^t}{t!}$$ en vinden dan

$$t(k) = -\frac{k+2}{k+1} +$$

$$(-1)^k \cdot \left[(k+1)\cdot(k+1)! \sum_{t=k+2}^{\infty} \frac{(-1)^t}{t!}\right]^{-1}$$

en na enkele herleidingen

$$t(k) = \frac{k+2}{k+1} \cdot \left[-1 + \left[1 + (k+2)! \sum_{t=k+3}^{\infty} \frac{(-1)^t}{t!}\right]^{-1}\right]$$

en omdat

$$\lim_{k\to\infty} (k+2)! \sum_{t=k+3}^{\infty} \frac{(-1)^t}{t!} = 0$$

volgt dat de rij tot nul nadert.
Met de rekenmachine hadden we dit nooit kunnen ontdekken door de instabiliteit van het rekenproces. Iedere kleine afronding is fataal.

Tenslotte nog iets over het verband tussen de kettingbreuk uit het eerste artikel en de differentievergelijking uit het tweede artikel.
We zagen dat de kettingbreuk

$$\cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cfrac{b_4}{a_4 + \dots}}}}$$

aanleiding geeft tot twee lineaire differentievergelijkingen van de tweede orde

$T_k = a_k T_{k-1} + b_k T_{k-2}$; $T_{-1} = 1$, $T_0 = 0$
$N_k = a_k N_{k-1} + b_k N_{k-2}$; $N_{-1} = 0$, $N_0 = 1$

en als

$$\lim_{k\to\infty} \frac{T_k}{N_k}$$

bestaat, deze de waarde van de kettingbreuk geeft.
De vergelijking

$$X_k = a_k X_{k-1} + b_k X_{k-2}$$

kunnen we omschrijven als

$$\frac{X_k}{X_{k-1}} = a_k + b_k \frac{X_{k-2}}{X_{k-1}}$$

en schrijven we

$$t(k) = -\frac{X_k}{X_{k-1}}$$

dan vinden we

$$t(k) = -a_k + \frac{b_k}{t(k-1)},$$

en voor $a_k = 1$ en $b_k = \frac{1}{k}$ is dit juist de bestudeerde differentievergelijking.

Gaan we anderzijds uit van

$$t(k) = -a_k + \frac{b_k}{t(k-1)}$$

en voeren we

$$t(k) = -\frac{A(k)}{B(k)}$$

in, dan vinden we

$$\frac{A(k)}{B(k)} = a_k + \frac{b_k B(k-1)}{A(k-1)}$$

en dus

$A(k) = a_k A(k-1) + b_k B(k-1)$,
$B(k) = A(k-1)$,
$A(k) = a_k A(k-1) + b_k A(k-2)$.

We hebben uit de differentievergelijking de bij de kettingbreuk behorende lineaire vergelijkingen weer terug gekregen.

Natuurlijk hadden we eerst de bibliotheek in kunnen gaan en in de literatuur naar de oplossing van onze problemen kunnen zoeken.
De eerste greep is al raak. In het klassieke boek van O. Perron: Die Lehre von den Kettenbruechen, Band II, pag. 19 (Stuttgart, 1957, derde druk) vind ik de formule

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{3}{4 + \dots}}}}$$

die zich direct laat omschrijven tot:

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{\frac{1}{2}}{1 + \cfrac{\frac{1}{3}}{1 + \dots}}}$$

Er staat achter Euler, Cesaro en we moeten denken aan de jaren 1779 en 1887. Er staan daar nog veel meer van dit soort kettingbreuken expliciet bepaald. Jammer? Nee, hoor, het ging er niet om iets nieuws, iets wereldschokkends te vinden, maar om het plezier van zelf zoekend en spelend bezig te zijn. En daar was ruimschoots gelegenheid voor.
De differentievergelijking zocht ik niet op in de literatuur. Maar als ik het achteraf netjes wiskundig op zou schrijven zou er van het hele verhaal niet veel overblijven.

Het definitieve artikel zou er zo uit kunnen zien: om een oplossing van de differentievergelijking

$$t(k) = -1 + \frac{1}{k \cdot t(k-1)}$$

te vinden stellen we

$$t(k) = -\frac{p(k)}{q(k)};$$

dan geldt

$$\frac{p(k)}{q(k)} = \frac{p(k-1) + \frac{1}{k}q(k-1)}{p(k-1)}$$

Stel nu

$$p(k) = p(k-1) + \frac{1}{k}q(k-1)$$

$$q(k) = p(k-1)$$

dus

$$p(k) = p(k-1) + \frac{1}{k}p(k-2).$$

Een oplossing is triviaal, namelijk
$p(k) = k + 2$.

Door substitutie verifieert men direct dat ook:
$p(k) = (k + 2) \cdot e(k + 2)$
met

$$e(n) = \sum_{s=0}^{n} \frac{(-1)^s}{s!}$$

een oplossing is. De algemene oplossing is dus
$p(k) = (k + 2)\,[\lambda + \mu e(k + 2)]$
De algemene oplossing van

$$t(k) = -1 + \frac{1}{k \cdot t(k-1)}$$

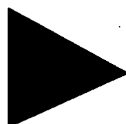
is

$$t(k) = -\frac{p(k)}{q(k)} = -\frac{(k+2) \cdot [\lambda + \mu e(k+2)]}{(k+1) \cdot [\lambda + \mu e(k+1)]}$$

Bij gegeven beginwaarde $t(0)$ zijn direct passende λ en μ te vinden.

Zo eenvoudig is het achteraf!

* Dit artikel is het vervolg van *Een boeiende vraag (I)* in Euclides 69-6 bladzijde 178.



Mededeling

Symposium aan Technische Universiteit Eindhoven

Wiskundige problemen bij glasfabricage-processen

Vrijdag 22 april 1994 vindt aan de Technische Universiteit Eindhoven een symposium plaats over de rol van industriële wiskunde bij glasfabricage. Het gaat daarbij om het begrijpen en voorspellen van de processen, met het accent op technische en modelmatige aspecten. De conferentie vindt plaats in 'paviljoen B', van tien uur tot half zes, de voertaal is Engels. Belangstellenden kunnen zich aanmelden bij mw. A.M. Oversteegen, telefoon 040 - 47 27 53, bij wie ook de brochure aan te vragen is. De kosten voor deelname bedragen *f* 25,-.

Tijdens de bijeenkomst zullen onderzoeksprojecten aan de orde komen, die van belang zijn voor de Europese glasindustrie. Onderwerp van gesprek zijn viskeus sinteren, vlakglasfabricage, glasfibers, stralingswarmte-overdracht bij glasfabricage en de produktie van flessen. Organisatoren van het symposium zijn de groep numerieke analyse van de Technische Universiteit Eindhoven en de werkgroep industriële en toegepaste wiskunde van het Wiskundig Genootschap.

▶ Kanttekeningen bij de Fermat-dag

Harm Bakker

Dat het feit dat een wiskundige in Amerika een stelling heeft bewezen, meer dan 600 mensen beweegt om op een vrije zaterdag naar Utrecht te reizen! Het gaat dan ook niet om zomaar een stelling, maar over één die de wiskundige wereld al zo'n 350 jaar bezig houdt. We hebben het hier over de Laatste Stelling van Fermat:

voor gehele $n \geq 3$ zijn er geen positieve gehele a, b en c met $a^n + b^n = c^n$

Fermat (1601-1665) formuleert deze stelling in de kantlijn van een boek van Diophantus en vermeldt erbij dat hij er een wonderbaarlijk bewijs voor heeft gevonden. De beschikbare ruimte zou echter te klein zijn om het daar uit te werken. Helaas heeft Fermat ook niet op een andere plaats dit bewijs gepresenteerd.

Vele wiskundigen, zowel professionals als amateurs, hebben in de loop der jaren geprobeerd het bewijs te leveren en het lijkt er op dat het Andrew Wiles nu is gelukt. Enige terughoudendheid is daar wel bij geboden, want het manuscript waarin de uiteindelijke afronding wordt gegeven, is slechts aan een klein aantal specialisten ter hand gesteld. Toch zijn er vele deskundigen die hun vertrouwen in de correctheid van het bewijs hebben uitgesproken. Reden voor het Wiskundig Genootschap om samen met de Universiteit van Utrecht op zaterdag 6 november 1993 een symposium te organiseren over de Laatste Stelling van Fermat, in het vervolg aangeduid met de gebruikelijke afkorting FLT (Fermats Last Theorem).

Het ochtendprogramma

De bedoeling van het ochtendprogramma was het publiek enig zicht te geven op de plaats van FLT binnen de wiskunde. In drie voordrachten werd een aantal takken van wiskundig onderzoek aangegeven die mede tot ontwikkeling zijn gekomen door het zoeken naar een bewijs van FLT.

P. Stevenhagen koos als vertrekpunt van zijn voordracht de Stelling van Pythagoras en de geheeltallige oplossingen daarvan, de Pythagoreïsche Triples (Noot van de redactie: de hier aangehaalde spreker behoort tot degenen die het woord *Pythagoreïsch* verkiezen boven het woord *pythagorisch*). Zo werd het verband gelegd met de algebraïsche getaltheorie en met de ideaaltheorie van Kummer (zie ook kader 1).

In de lezing van R. Tijdeman passeerde een groot aantal variaties op en generalisaties van de vergelijking van Fermat de revue. Verder werd een historisch overzicht gegeven van een aantal ondergrenzen voor n. Tijdeman onderscheidde twee gevallen.
In het eerste geval zijn er geen oplossingen met $n < 1{,}56 \times 10^{17}$;
in het tweede geval zijn er geen oplossingen met $n < 4 \times 10^6$.
Dit waren de scherpste afschattingen begin 1993.
Een andere zeer nuttige generalisatie van de Fermatvergelijking is de vergelijking $A + B = C$ en het bijbehorende ABC-vermoeden (zie kader 2).

De derde voordracht werd verzorgd door D. Zagier. Hij legde het verband met de algebraïsche meetkunde en in het bijzonder met de vraag naar rationale punten op krommen (zie kader 3).

Het middagprogramma

De organisatie had ervoor gekozen om twee middagprogramma's samen te stellen. Het A-programma was bedoeld voor deelnemers met kennis op vwo-niveau. Aan de hand van een serie opgaven en opdrachten die op papier dan wel met de computer uitgewerkt dienden te worden, werd een aantal onderwerpen die gerelateerd zijn aan FLT aangesneden. De begeleidende tekst van de hand van F. Beukers was zeer helder en inspirerend geschreven, maar voor een deel van het publiek was de behandelde materie toch echt te moeilijk.
De meer wiskundig onderlegde aanwezigen konden terecht bij het B-programma. In een tweetal lezingen, verzorgd door F. Oort en J. Top, werd geprobeerd een indruk te geven van het bewijs dat Wiles heeft afgerond. Zoals Top ook al opmerkte is het ondoenlijk om voor een weliswaar wiskundig geschoold, maar niet bij uitstek gespecialiseerd publiek een gedetailleerde behandeling te presenteren. Temeer daar het artikel een kleine 200 bladzijden zal gaan beslaan. En dat dicht dan ook alleen nog maar enkele gaten in een veel grotere opzet die de laatste decennia is opgebouwd. Toch moet de toehoorder een aardig globaal idee hebben gekregen van de structuur van het bewijs, in het bijzonder van het grote aantal wiskundige disciplines dat bij de uiteindelijke oplossing betrokken is.

Slotopmerkingen

Zoals E. Thomas, voorzitter van het Wiskundig Genootschap, in zijn openingswoorden opmerkte, is het voltooien van een bewijs voor FLT een historisch moment. Maar de toekomst zal moeten leren wat de werkelijke waarde van de ontwikkelde theorieën en technieken is.
De initiatiefnemers, F. Oort, J. Strooker en R. Tijdeman, en alle andere medewerkers kunnen terugzien op een zeer geslaagde dag. De tijdens het symposium uitgereikte bundel met teksten van de voordrachten zal door menige liefhebber nog wel eens worden ingezien. Voor geïnteresseerden die de dag hebben gemist zou het aardig zijn als de syllabus in een of andere vorm (Epsilon?) in de handel zou komen.

Nog onlangs moest Wiles melden, dat bij inspectie van het gehele bewijs een hiaat werd gevonden. We kunnen dus niet zeggen dat het bewijs al bestaat. Dit doet niets af aan de waarde van de Fermat-dag.

---

kader 1

Kies in de vergelijking $a^n + b^n = c^n$ voor n de waarde 2. Het linkerlid lijkt als som van twee kwadraten niet ontbindbaar, maar als we het getalbegrip uitbreiden, dan blijkt er wel een ontbinding te bestaan:

$$c^2 = a^2 + b^2 = (a + b\sqrt{-1})(a - b\sqrt{-1})$$

Voor natuurlijke getallen geldt het principe:

Als het product van twee getallen A en B zonder gemeenschappelijke factoren een kwadraat is, dan is zowel A als B een kwadraat.

Zonder teveel nadenken toepassen van dit principe op bovenstaande vergelijking levert:

$$a + b\sqrt{-1} = (m + n\sqrt{-1})^2 = m^2 + n^2 + 2mn\sqrt{-1}$$

Vergelijken en invullen levert:

$$a = m^2 - n^2,\ b = 2mn,\ c = m^2 + n^2$$

een bekende karakterisering van Pythagoreïsche tripels.

Waarom laat de vergelijking $a^n + b^n = c^n$ voor grotere waarden van n zich niet op een analoge manier aanpakken? Oorzaak is dat de optredende (complexe gehele) getallen zich voor $n > 3$ totaal anders gedragen dan gewone gehele getallen. Eén van de problemen daarbij is dat zulke getallen zich niet op een eenduidige manier laten schrijven als product van priemfactoren. Bijvoorbeeld

$$6 = 2.3 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5})$$

Dit soort verschijnselen heeft Kummer (1810 - 1893) aangezet tot het ontwikkelen van zijn theorie van ideaalfactorisatie.

---

kader 2

Het ABC-vermoeden

Voor gehele getallen $n > 1$ wordt $N(n)$ gedefinieerd als het product van de verschillende priemfactoren van n. Het ABC-vermoeden voor exponent 2 zegt nu dat voor elk drietal positieve gehele getallen A, B en C met $A + B = C$ en $ggd(A, B) = 1$ geldt $C < (N(ABC))^2$. Dit is een vermoeden: een bewijs is nog niet gevonden. Mocht er een bewijs voor dit vermoeden worden gevonden, dan volgt de Laatste Stelling van Fermat eenvoudig: Stel $a^n + b^n = c^n$, waarbij $ggd(a, b) = 1$. Kies $A = a^n$, $B = b^n$ en $C = c^n$. Dan volgt uit

$$c^n < (N(a^n b^n c^n))^2 = (N(abc))^2 \leq (abc)^2 \leq c^6$$

dat $n < 6$. Maar voor die waarden van n is het al heel lang bekend dat er geen oplossingen zijn ($n = 3$: Euler; $n = 4$: Fermat; $n = 5$: Dirichlet en Legendre).



Fermat

kader 3

De vergelijking $a^n + b^n = c^n$ is gelijkwaardig met $(a/c)^n + (b/c)^n = 1$, waarmee het zoeken naar geheeltallige oplossingen van de Fermatvergelijking equivalent is geworden met het zoeken naar punten met rationale coëfficienten op de kromme $x^n + y^n = 1$. Kiezen we n=2, dan herkennen we hierin de vergelijking van een cirkel met daarop het punt $P = (-1,0)$. Trekken we door P een lijn, zeg $x = ty - 1$, dan vinden we een tweede snijpunt waarvoor geldt

$x = \dfrac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$ en $y = \dfrac{2t}{t^2 + 1}$ en ieder punt op de kromme kan op deze manier geschreven worden. Het is niet moeilijk na te gaan dat iets dergelijks geldt voor elke kromme die beschreven wordt door een tweedegraads vergelijking in x en y. We zeggen dat tweedegraads krommen geparametriseerd kunnen worden door rationale functies.

Voor derdegraads krommen geldt dit niet. Zij behoren wel tot de klasse van krommen die geparametriseerd kunnen worden met zogenaamde elliptische functies. Dergelijke krommen worden elliptische krommen genoemd.

Het vermoeden van Taniyama, Shimura en Weil (TSW) spreekt uit dat elke elliptische kromme ook geparametriseerd kan worden met nog weer andere functies, de modulaire functies. Ken Ribet bewees echter in 1986:

Als $a^p + b^p = c^p$ een niet-triviale oplossing is van de Fermatvergelijking met $p > 3$ en p priem, dan heeft de (derdegraads!) kromme $y^2 = x(x - a^p)(x + b^p)$ geen parametrisering door modulaire functies.

Hieruit volgt dat, indien TSW correct is, de Fermatvergelijking geen niet-triviale oplossingen bezit. Het bewijs van Wiles komt in feite neer op het aantonen van TSW voor een klasse van krommen waartoe ook de Ribet-krommen behoren, en daarmee is FLT bewezen.

● Serie ● ● ● ● ●

'Rekenen in W 12-16'

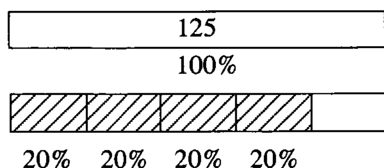
▶ Procenten-test

Mieke Abels

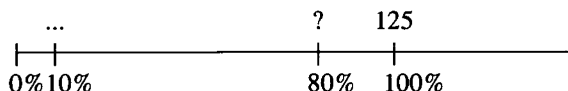
Een deel van mijn brugklasleerlingen gebruikt bij procenten ten allen tijde de bekende methode: 'eerst 1%'. Vaak leidt dat tot onhandig gereken met alle fouten van dien. Dat het handiger is om meerdere modellen of manieren te kunnen gebruiken wil ik laten zien aan de hand van de volgende modellentest, die ik zonder commentaar presenteer.

Test 1: 'Hoeveel is 80% van 125 miljoen?'

A *strook*



B *dubbele getallenlijn*



C *verhoudingstabel I*

deel	80		?
totaal	100	25	125

D *verhoudingstabel II*

bedrag	125		?
percentage	100%	10%	80%

E *Verband met breuken:*
80% van 125 is $\frac{4}{5}$ deel van 125, dan verder met: $\frac{1}{5}$ deel van 125 is 25, dus $\frac{4}{5}$ deel is 100, of

F *Via verband met kommagetallen:*
$0{,}8 \times 125 = 100$

Voor brugklasleerlingen zijn A, B en D goed te begrijpen en te gebruiken. C is lastiger, niet vanwege het rekenwerk, maar om de gegevens op de juiste plaats in te vullen. E is lastig voor zwakke rekenaars. F is voor brugklasleerlingen nog een trucje.

Test 2: Reken nu eens 15% van 125 op de zes manieren uit. En ook eens 3% van 125.

Test 3: En nu 15% van 188 miljoen.

Test 4: 60 van de 150, hoeveel procent is dat?

Test 5: In de uitverkoop, 10% korting, kost een jas nu *f* 126,-. Hoeveel kostte deze jas eerst?

Wat zijn uw conclusies uit test 2 en 3?
Bij test 4 gaat mijn voorkeur uit naar C en E, maar bij test 5 naar B, D en E.

Het gebruik van modellen en verbanden met verhoudingen, breuken en kommagetallen speelt in de hele leerlijn van procenten een grote rol, zowel bij het ontwikkelen van het begrip als bij het organiseren van de berekeningen. Pas later kunnen de leerlingen dan, met inzicht, (eigen) algoritmes gaan gebruiken en in situaties van afname of groei een percentage als factor gebruiken. Belangrijk hierbij is dat de leerlingen altijd terug kunnen grijpen naar een model dat ondersteuning biedt om de structuur van een probleem te doorzien.

▶ Rekentrainer – Wiskunde voor de Basisvorming

Jan Koekkoek

Visiria's[1] Rekentrainer is een wiskunde-reken-programma voor leerlingen in de Basisvorming (van vbo tot en met vwo) en kan alleen gebruikt worden onder Windows 3.0 (of hoger). Het pakket kan op meerdere manieren worden ingezet bij het wiskunde-onderwijs: allereerst is het een instrument om na te gaan of het rekenonderwijs in voorgaande jaren ook inderdaad heeft geleid tot het beoogde doel. Het programma signaleert manco's en is vervolgens goed inzetbaar in de sfeer van de remediale hulp.
Daarnaast sluit het pakket ook goed aan op een aantal Kerndoelen uit de Basisvorming. Er moet daarbij gedacht worden aan het deelgebied 'Rekenen, meten en schatten'. Leerlingen kunnen trainen op het gebied van hoofdrekenen, het handig rekenen en schatten. De onderwerpen (het programma noemt dit een boekenkast met boekjes) die achtereenvolgens aan de orde kunnen komen zijn: procenten, verhoudingen, breuken, grafieken, geld, tijd, meten en meetkunde, hoofdrekenen, schatten, getalkennis en cijferen.

Wanneer een leerling een onderwerp heeft gekozen, wordt gevraagd of hij meteen met de sommen wil beginnen of eerst nog wat algemene uitleg wil krijgen. In de algemene uitleg wordt de theorie kort en bondig uitgelegd, als het enigszins kan met concrete voorbeelden.

De opgaven zijn bijna altijd geplaatst in een context. Zo komen bij het onderdeel procenten bijvoorbeeld de onderwerpen alcohol, grasmaaien, rente en examen aan de orde. Vanuit die situatie wordt aan de leerlingen gevraagd een bepaald rekenprobleem in hun eigen tempo op te lossen.
Bij de verwerking van het antwoord wordt uitgegaan van het principe van multiple choice. Het nadeel hiervan is dat leerlingen soms geneigd zijn naar de antwoorden toe te rekenen. Aan de andere kant zijn door leerlingen ingegeven antwoorden moeilijker door een computer te beoordelen omdat er vaak vele manieren van noteren mogelijk zijn: een niet ver genoeg vereenvoudigde breuk is toch (bijna) goed.
Bij een foute keuze geeft het programma een didactische aanwijzing waarmee de leerling weer op de goede weg wordt geholpen. De foute antwoorden zijn dan ook antwoorden waaraan een veel gemaakte fout aan ten grondslag ligt. Aanwijzingen als 'je hebt de verkeerde getallen op elkaar gedeeld' of 'je hebt het verkeerde gedeelte berekend' kunnen de leerling vervolgens weer op de goede weg helpen.
Na een al of niet goede beantwoording kan de uitleg opgevraagd worden. De score wordt bijgehouden met gezichtjes: van lachend bij de eerste keer goed tot huilend bij pas de derde poging goed. Voor de docent erg overzichtelijk, maar waarschijnlijk niet erg motiverend voor een leerling met erg veel foute antwoorden: er staat een hele rij huilende gezichtjes op het scherm!
Omdat de getallen in de opgaven steeds veranderen is het voor de leerling mogelijk een bepaalde opgave meerdere keren op te vragen. De Rekentrainer is daarom voor de leerling een onuitputtelijke bron van steeds weer verschillende rekenopgaven.

Ook voor de leraar biedt dit pakket het een en ander. De Rekentrainer geeft zelf een overzicht van de hoeveelheid door de leerling gemaakte sommen en laat zien hoe er per onderdeel is gescoord. Het biedt bovendien de mogelijkheid te zien hoelang de leerling over de sommen heeft gedaan. Wordt er voor gekozen om het pakket uit te breiden met Klasbak, dan worden deze mogelijkheden nog verder uitgebouwd. Dit analyseprogramma geeft de mogelijkheid de resultaten van individuele leerlingen nader te bestuderen en zijn de prestaties voor langere duur

te volgen: per sessie is na te gaan wat een leerling heeft geoefend, hoeveel fouten daarin gemaakt zijn en of er progressie in de resultaten zit.

Het programma als geheel heeft visueel een goede opbouw. De verschillende schermen zien er overzichtelijk uit. Het gebruik van kleurvlakken met plaatjes, grafieken en stukjes tekst die uit de krant lijken te zijn geknipt maakt het voor de leerlingen aantrekkelijk om met het programma te werken. Het pakket wordt geleverd met een handleiding in een keurige map. Alle onderdelen staan erin besproken. Er zijn voor de leerlingen geen werkbladen bijgevoegd, maar dat is ook niet nodig: het programma heeft alles in zich.
Het is alleen jammer dat het alleen onder Windows 3.0 of hoger werkt. Met alleen de NIVO-apparatuur is dit pakket dus niet te gebruiken.

[1] Uitg.mij. Visiria, H. de Manpark 4, 3411 ZP Lopik, tel.: 03485-2982

Boekbespreking

Von Glasersfeld (ed): *Radical Constructivism in Mathematics Education*. Kluwer 1991. *f* 150,--; 247 blz.

In de hier te bespreken bundel heeft Von Glasersfeld elf artikelen bijeengebracht van verschillende auteurs: filosofen. psychologen en wiskundedidactici. Het centrale thema is: hoe kunnen de constructivistisch kennistheoretische inzichten dienstbaar worden gemaakt aan het wiskundeonderwijs?

In zijn inleiding zet Von Glasersfeld nog eens in het kort de belangrijkste ideeën van een radicaal constructivisme uiteen. Toegepast op het onderwijs leidt dit tot een scherp onderscheid tussen 'teaching' en 'training'. Bij de eerste voert het tot 'understanding', bij de tweede tot een 'competent performance'. Bij wiskundeonderwijs gaat het niet in de eerste plaats om overdracht van kennis van de docent naar de leerling (zo dat al mogelijk is), maar om kennisverwerving: een actief en ook interactief proces bij de leerling, tussen docent en leerling en tussen leerlingen onderling, waarbij de leerling zich de begrippen eigen maakt. De filosoof Steedman formuleert bovenstaande opvatting bondig als volgt: 'Persons learn not by being given knowledge but rather by constructing knowledge' (blz. 6). In zijn nogal theoretische bijdrage, 'There is no more safety in numbers: a new conception of mathematics teaching', plaats Steedman de radicaal constructivistische onderwijsopvattingen in een wetenschapstheoretisch kader.

Van niet te onderschatten belang is de rol van de taal in het kennisverwervingsproces. Nagenoeg alle auteurs benadrukken een of meerdere taalaspecten in hun onderzoek. Het meest uitvoerig hierin zijn Richards in Mathematical discussions en Kaput in Notations and representations. Deze laatste bijdrage is wel erg theoretisch en gaat gebukt onder een overmaat aan modellen en schema's. De meeste bijdragen bevatten verslagen van probleemsituaties in de klas, van probleemsituaties met individuele leerlingen of met kleine groepjes van leerlingen. Bijna alle auteurs openen hun verhaal met een uitvoerige theoretische inleiding. De enige Nederlandse bijdrage is van de hand van Jan van den Brink. In zijn Didactic constructivism geeft hij geen lange theoretische beschouwingen maar licht de toepasbaarheid van de constructivistische ideeën toe aan de hand van vele voorbeelden uit het Wiskobas-project.

Voor docenten bij het voortgezet onderwijs is Balacheff's Treatment of refutations interessante lectuur. In zijn onderzoek, dat geïnspireerd is door Lakatos' Conjectures and refutations, laat hij groepjes van twee 13- tot 14-jarige leerlingen werken aan het volgende probleem: Geef een manier om het aantal diagonalen van een polygoon te berekenen als van dat polygoon het aantal hoekpunten bekend is. De leerlingen van ieder koppel moeten het samen eens zijn en hun antwoord moeten zij op een voor andere leerlingen begrijpelijke manier formuleren. De rol van de onderzoeker is hier bijzonder. Zo gauw de leerlingen een vermoeden hebben geformuleerd, komt hij met een tegenvoorbeeld. Het is interessant om te zien op welke gronden leerlingen tot een vermoeden komen, hoe de een de ander overtuigt, ja hoe voor sommigen het niet om een vermoeden maar om een onomstootbare zekerheid gaat. Nog interessanter is het om te zien hoe leerlingen met een tegenvoorbeeld omgaan. U denkt dat ze hun vermoeden wel zullen aanpassen? Mis, het tegenvoorbeeld wordt tot uitzonderingsgeval verklaard.

Van verschillende in deze bundel verzamelde opstellen is mij het verband met het constructivisme niet duidelijk en vaak heb ik de indruk dat het constructivisme er met de haren is bijgesleept. Dat neemt niet weg dat ik, op enkele wijdlopige theoretische beschouwingen na, de meeste bijdragen met interesse heb gelezen.

J. Donkers

Mededeling

Aankondiging studiemiddag Kiezen of afhaken bij exacte vakken in vo?

Datum: maandag 16 mei 1994, 15-17 uur.
Plaats: Wentgebouw Faculteit Scheikunde, Sorbonnelaan 16, 3584 CA Utrecht.

De Amerikaanse Dr. Sheila Tobias verricht onder meer onderzoek naa het keuzeprobleem. Zij heeft daarover gepubliceerd in een aantal boeken waarvan de titels u bekend kunnen voorkomen: 'Overcoming Math Anxiety' en 'They're not Dumb, they're Different'. In mei brengt Dr. Tobias (op uitnodiging van de Universiteit van Amsterdam) een bezoek aan Nederland. Zij is bereid om dan ook een seminar te verzorgen voor het Centrum Vrouwen en Exacte Vakken.
Aanmelding voor deze middag is mogelijk tot uiterlijk 5 mei, door overmaking van *f* 15,- op postbankrek. 2382285 t.n.v. Vrouwen en Exacte Vakken, Utrecht, onder vermelding van 'Sheila Tobias'. Na aanmelding ontvangt u het definitieve programma en een routebeschrijving. Inlichtingen: tel. 030-856746.

● Werkblad ●

Lees de tekst en beantwoord de vraag.

Op een bloedhete dag in de maand augustus draait een wrakke auto de parkeerplaats van het station Weesp op. Uit deze auto stapt een vader met zijn vier kinderen. Je kent dat wel: de achterbak gaat open, pa neemt nog een kop koffie uit de thermoskan, de kinderen worden nog even volgestopt met meegebrachte broodjes en cola. Enigszins zweterig vertrekt het gezelschap met koelbox, een tas met waardevolle spullen, een tas met regenjassen, en een tas met onduidelijke rommel richting stationsloket. Vader bestelt vijf dagtochtkaarten nummer 21: treinretour Weesp-Amsterdam, een rondvaartboottocht door de Amsterdamse grachten, vrij reizen met bus, tram en metro door Amsterdam, en toegang tot de dierentuin Artis. Hij moet voor deze vijf kaarten in totaal *f* 88,90 betalen. 'Een meevaller', denkt pa, en de hele karavaan duikt kalm de stationstunnel in. Over tien minuten vertrekt de trein pas; halverwege de tunnel vertrouwt pa de zaak toch niet en haalt uit de tas met waardevolle spullen de kaartjes. 'Zie je wel', denkt hij, 'dat klopt niet. Vier kinderen en één volwassene'. Het op één na oudste kind heeft meegekeken en zegt: 'Pa, dat klopt niet, we moeten kaartjes hebben voor twee volwassenen en drie kinderen'. En wijzend op het oudste kind: 'Hij is al boven de twaalf'. Zuchtend geeft pa zijn zoon gelijk en vertrekt iedereen weer richting loket. Daar aangekomen lijkt heel Weesp ineens met de trein te gaan, zeker tien wachtenden staan er voor het loket. Als de lokettist na veel uitleggen begrijpt dat er een fout is gemaakt, zegt hij: 'Het spijt me meneer, de computer heeft een fout gemaakt'. Na een heen en weer schuiven met kaartjes en geld blijkt dat vader in totaal *f* 104,20 heeft betaald. Pa, door ervaring wijzer geworden, controleert weer de kaartjes. Het blijken nu kaartjes te zijn voor drie volwassenen en twee kinderen. Weer uitleggen, schuiven met kaartjes en geld, enz.

Hoeveel heeft deze vader nu uiteindelijk moeten betalen?

Uit: proefwerk Praktisch Rekenen mavo-3, S.G. Greijdanus, Zwolle (experimenteerschool W12-16).

● Werkblad ●

1. Stel je bent 1.80 meter groot en je staat in de zon, de lengte van je schaduw is 2,5 meter. Maak een schematische tekening van deze situatie. Bereken de hoek die de zonnestralen met de grond maken.

2. De zonnestralen maken op een bepaald moment een hoek van 72° met de grond. De schaduw van een toren is 47 meter lang. Hoe hoog is de toren?

3. De tophoek van een hellingmeter is 100°; de hoek die het loodje maakt is 80°. Hoe groot is het hellingspercentage?

4. Een ronde reclamezuil heeft een diameter van 2 meter. Op deze zuil passen verschillende posters. Iemand heeft berekend dat een poster met een breedte van 2 meter nog helemaal te zien zal zijn op een afstand van 10 meter. Laat door berekening zien of dat juist is of niet.

5. De 'Peperbus' in Zwolle is ongeveer 84 meter hoog. Als ik op een plek op de Melkmarkt sta, kan ik nog ongeveer één vierde deel van de Peperbus zien. Het zicht op de rest wordt mij ontnomen door een bankgebouw van zo'n 12 meter hoogte, waar ik ongeveer 10 meter vandaan sta. Hoe ver sta ik van de Peperbus?

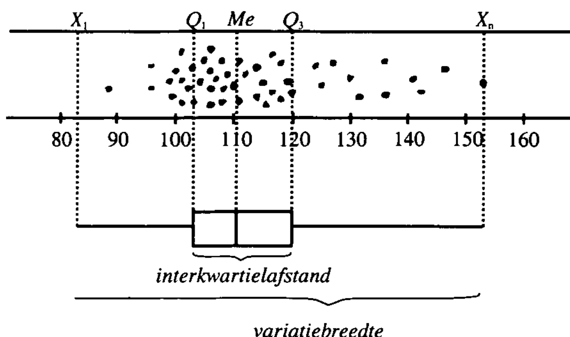
Uit: proefwerk Praktisch Rekenen mavo-3, S.G. Greijdanus, Zwolle (experimenteerschool W12-16).

▶ Kwartielbepaling

Heleen Verhage

In de beschrijvende statistiek spelen, naast de grafische voorstellingen, centrum- en spreidingsmaten een belangrijke rol. Een eigentijds plaatje waaruit veel is af te lezen is de zogenaamde boxplot. Om een boxplot te tekenen, worden de waarnemingen op volgorde van grootte gezet en vervolgens ingedeeld in vier groepen van 25% elk. De volgende vijf getallen spelen een rol (er zijn n waarnemingen):

- laagste waarneming (X_1)
- 1e kwartiel (Q_1)
- mediaan (Me)
- 3e kwartiel (Q_3)
- hoogste waarneming (X_n).



In de boxplot is één centrummaat verwerkt (de mediaan) en twee spreidingsmaten:
- de variatiebreedte (X_n-X_1)
- de interkwartielafstand (Q_3-Q_1).

Al met al veel informatie in een compact plaatje.

Bij het zelf tekenen van een boxplot komen enkele technische details kijken. Het blijkt dat daar nogal wat vragen over leven. Vandaar dit stukje, dat alleen ingaat op het geval waarin sprake is van een serie losse waarnemingen. Hoe worden dan de vijf boxplot-getallen bepaald?

Noem X_i de i-de waarneming nadat de waarnemingen op volgorde van grootte zijn gezet. De laagste en de hoogste waarneming zijn geen probleem: resp. X_1 en X_n. Voor de mediaan is de afspraak dat het bij een oneven aantal waarnemingen de middelste waarneming is en bij een even aantal waarnemingen het gemiddelde van de twee middelste getallen.

Voorbeeld:
bij n = 49 is $Me = X_{25}$ en bij n = 50 is de mediaan het gemiddelde van de 25e en 26e waarneming: $Me = (X_{25}+X_{26})/2$.

Nu de kwartielen. Slordig gezegd is Q_1 'de mediaan van de linkerhelft van de waarnemingen' en Q_3 'de mediaan van de rechterhelft'. Uit deze omschrijving volgt echter nog niet eenduidig hoe de kwartielen berekend moeten worden, want wat wordt precies bedoeld met de 'linkerhelft' en de'rechterhelft' in het geval van een oneven aantal waarnemingen?
In het boek *Achtergronden van het nieuwe leerplan Wiskunde 12-16, Band 2* staat hierover het volgende:
'reken bij een oneven aantal waarnemingen de mediaan zowel tot de linker- als tot de rechter helft'.

We werken deze afspraak uit voor de vier gevallen:

a. n is een 4-voud; bijvoorbeeld n = 48. Dan kunnen de getallen in vier even grote groepen worden ingedeeld: X_1 t/m X_{12}, X_{13} t/m X_{24}, X_{25} t/m X_{36} en X_{37} t/m X_{48}. De mediaan is $Me = (X_{24}+X_{25})/2$ en als eerste resp. derde kwartiel nemen we $Q_1 = (X_{12}+X_{13})/2$ en $Q_3 = (X_{36}+X_{37})/2$.

b. n is een 4-voud + 1; bijvoorbeeld $n = 49$. Nu zijn er niet zonder meer vier even grote groepen te vormen. Het middelste getal is X_{25}, dit is dus de mediaan. Aangezien X_{25} zowel tot de linker- als tot de rechterhelft gerekend wordt, krijgen we als linkerhelft X_1 t/m X_{25} en als rechterhelft X_{25} t/m X_{49}. De middelste getallen hiervan zijn $Q_1 = X_{13}$ en $Q_3 = X_{37}$.

c. n is een 4-voud + 2; bijvoorbeeld $n = 50$. Er kunnen twee groepen gevormd worden: X_1 t/m X_{25} en X_{26} t/m X_{50}. De mediaan is $Me = (X_{25}+X_{26})/2$. De beide helften hebben een oneven aantal waarnemingen, zodat $Q_1 = X_{13}$ en $Q_3 = X_{38}$.

d. n is een 4-voud + 3; bijvoorbeeld $n = 51$. De mediaan is $Me = X_{26}$. De indeling in helften leidt tot X_1 t/m X_{26} voor de linkerhelft en X_{26} t/m X_{51} voor de rechterhelft (omdat het aantal waarnemingen oneven is, doet de mediaan twee keer mee). De kwartielen worden: $Q_1 = (X_{13}+X_{14})/2$ en $Q_3 = (X_{38}+X_{39})/2$.

In de vakliteratuur komen overigens ook andere methoden om de kwartielen te bepalen voor (bijv. lineaire interpolatie). Uiteindelijk is het gewoon een kwestie van afspraak.

Verschenen

A. Mizrahi/M. Sullivan: *Mathematichs for Business, Life Sciences an d Social Sciences*; John Wiley & Sons; ISBN 0-471-59997-2; 965 blz.; 22,50.
Het betreft hier een grondig herziene vijfde editie van een leerboek wiskunde voor studenten in de economische en sociale richtingen. De onderwerpen Lineaire Algebra, Lineair Programmeren, Waarschijnlijkheidsrekening en Statistiek, Financiële Rekenkunde en Calculus zijn onafhankelijk van elkaar te behandelen.
Er is veel zorg besteed aan zowel de wiskundige exactheid als aan een aansprekende wijze van presenteren. Dit laatste wordt mede gerealiseerd door de algemene theorie te behandelen in interactie met toepassingsgerichte voorbeelden.
Elke paragraaf is voorzien van een uitgebreide verzameling oefeningen; van de oneven genummerde opgaven zijn de antwoorden in een appendix opgenomen.

Mededelingen

Historische Kring Reken-Wiskunde-onderwijs

De NVORWO heeft in samenspraak met de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (NVvW) het initiatief genomen tot oprichting van een 'Historische Kring Reken-Wiskundeonderwijs', zijnde een kring van mensen, die geïnteresseerd zijn in de historische ontwikkeling van het reken-wiskundeonderwijs aan vier- tot achttienjarigen (inclusief de opleiding).

Vooralsnog is de doelstelling van deze Kring ruim gekozen, namelijk de ontplooiing van activiteiten - van reken- en wiskundige, onderwijskundige en/of historische aard - die kunnen leiden tot een beter inzicht in de historische ontwikkeling van het reken-wiskundeonderwijs aan vier- tot achttienjarigen.

Al diegenen die geïnteresseerd zijn in (enig aspect) van bovengenoemde doelstelling, kunnen deelnemen aan de activiteiten van de Kring.

Een eerste bijeenkomst van de Historische Kring is gepland op *zaterdag 4 juni 1994* in de 'historische omgeving' van het Nationaal Schoolmuseum, Nieuwemarkt 1a te Rotterdam.

Het programma luidt als volgt:

13.00-13.30 uur: ontvangst
13.30-14.30 uur: rondleiding Schoolmuseum door de conservator, de heer M. van Ruiten
14.30-15.00 uur: theepauze
15.00-16.00 uur: voordracht Ed de Moor over het leven en werk van Jan Versluys (1845-1920), een van de grote Nederlandse schoolpedagogen, die ook belangrijke bijdragen heeft geleverd aan de ontwikkeling van het reken- en wiskundeonderwijs.
16.00-16.30 uur: vervolg en planning Historische Kring
vanaf 16.30 uur: borrel (desgewenst te vervolgen door een etentje in enig nabij restaurant).

Deelname aan deze bijeenkomst is in eerste instantie gebonden aan een maximum van twintig personen.
De inschrijving, waaraan geen extra kosten verbonden zijn, geschiedt op volgorde van aanmelding.
Deze aanmelding kan telefonisch of schriftelijk geschieden bij:
mevrouw Betty Heijman, p/a Freudenthal instituut, Tiberdreef 4, 3561 GG Utrecht, tel. 030-611611.

Beeldend kunstenaar is op zoek naar rekenlinialen.

Andreas Thedieck, Violenstraat 17, 3812 VV Amersfoort, telefoon 033-651464, is naarstig op zoek naar rekenlinialen, in verband met een werkstuk dat hij aan het voorbereiden is.
Wie helpt hem?

● Interview ● ● ● ●



► 'Met geduld kun je veel bereiken'

Wim van Birgelen, 40 jaar, sinds 1976 leraar aan de Onderwijsgemeenschap De Peelrand te Panningen, heeft dit jaar twee brugklassen; de leerlingen kunnen binnen de school kiezen voor één van de vbo-opleidingen verzorging, administratie, mode & kleding en landbouw & natuurlijke omgeving.

Wou je dit jaar graag brugklassen? Hoeveel lesuren per week heb je ze?
Ja, we hadden binnen de vakgroep afgesproken dat we alle drie één of meer brugklassen zouden nemen. Dat leek ons goed, nu we met het nieuwe leerplan gingen beginnen. Ik heb de klassen elk 3 uur per week.

Welke methode hebben jullie, en hoe is die gekozen?
We gebruikten al jarenlang Getal & Ruimte, en dat is zo gebleven. Ook de nieuwste editie vonden we er goed uitzien. We gebruiken de vbo/mavo-editie.

Hoe werk je?
De methode biedt veel oefenstof, die we helemaal doen. Ik zorg dat mijn leerlingen veel huiswerk krijgen; dat leveren ze bij mij in, en ik kijk het dan na.
Bij de methode zit geen werkblok; daaraan heb ik ook geen behoefte.
Ik gebruik veel een overheadprojector, bij het opbouwen van een opdracht, of bij het snel bespreken van een gemaakte opgave. Heel vaak maken de leerlingen zelf de uitwerkingen op een sheet voor de overheadprojector. Dat gaat prima.

Sla je soms gedeelten uit het boek over, of voeg je dingen toe?
Het boek is geschreven op 4 wekelijkse lessen, daarom moet ik soms wat overslaan. De algemene herhaling doe ik niet, en de gemengde opgaven die bij elk hoofdstuk staan worden alleen door de heel goede leerlingen gemaakt.
Bij de uitleg van nieuwe begrippen voeg ik soms voorbeelden toe, bijvoorbeeld iets actueels uit de krant.

Heb je een wiskundewerklokaal, of heb je ergens een materialenhoek?
Nee, ik heb gelukkig wel een vast lokaal. Daar heb ik draadmodellen en ook knipbladen. Ook is er software waar ik soms gebruik van maak. Daartoe moeten we even naar het informaticalokaal.

Ben je onverwachte dingen tegengekomen?
Nee, er zijn weinig problemen, alles gaat soepel. Het is eigenlijk opvallend hoe gemakkelijk leerlingen door moeilijke onderwerpen gaan. Als je de tijd neemt, als je voldoende geduld hebt, kun je veel bereiken. Zo krijg je ze een heel eind.

Wat is voor jou nu de belangrijkste vernieuwing?
Het nieuwe programma is praktischer, de leerlingen zien het nut. Dat is een stuk motiverender.

Martinus van Hoorn

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Jan de Geus, Valkenboslaan 262-A, 2563 EB Den Haag.

Opgave 653

Dit voorjaar werden de koppelconferenties wiskunde gehouden, die georganiseerd werden door het APS. Als huiswerkopdracht kregen de deelnemers mee: 'Bereid een les voor waarbij het leerproces van de leerlingen ondersteund kan worden door het gebruik van concreet materiaal.'
Afgelopen week hebben we deze les in de brugklas gegeven met het polydron-materiaal. Dit zijn plastic regelmatige veelhoeken met een kliksysteem, waardoor er o.a. lichamen mee gemaakt kunnen worden. Nadat de leerlingen per groepje de 5 Platonische lichamen gemaakt hadden, ging men de polyederformule van Euler aantonen: aantal zijvlakken + aantal hoeken = aantal ribben + 2.
Stel dat ik een lichaam wil hebben met 12 hoeken, dan wordt de formule: aantal zijvlakken = aantal ribben - 10. En dit soort formules had men in de brugklas net gehad: maak er een tabel bij en teken de grafiek! Toen moest de klas gaan nadenken: eigenlijk mogen toch alleen de roosterpunten in het eerste kwadrant getekend worden? En... hoort bij elk roosterpunt een lichaam?
Dit alles in 1 les behandelen was onmogelijk en ook niet noodzakelijk: de leerlingen waren enthousiast gemaakt. Ze wilden graag de volgende les verder gaan: welke lichamen hebben 12 hoeken? Uit hun grafiek konden ze de mogelijke aantallen ribben en zijvlakken aflezen.
Gedurende de les werden inderdaad lichamen gevonden die aan de eis voldeden: sommige convex, sommige concaaf. En sommige 'lichamen' waren nog 'open'.

Voor ons, als leraren, waren het enerverende lessen en was er een puzzel geboren voor Euclides:
Welke 3-dim. lichamen bestaan er onder de volgende voorwaarden:
- Het lichaam moet convex zijn.
- De zijvlakken bestaan uit regelmatige veelhoeken.
- De ribbelengte is steeds gelijk.
- Het aantal hoeken is 12.

Inzending, binnen 1 maand, levert max. 5 ladderpunten op.

Oplossing 650

Er moest gezocht worden naar een rechthoekige driehoek met zijden kleiner dan 1000 en scherpe hoeken zo dicht mogelijk bij 30° en 60°.
Alle deelnemers, waarbij verschillende nieuwe (welkom!), gebruikten de volgende formules voor de zijden van een rechthoekige driehoek: $m^2 - n^2$, $2\,mn$ en $m^2 + n^2$.
De meesten gebruikten nu een computer om verder te gaan en dan heb je snel het antwoord: de zijden zijn 451, 780 en 901.

Sommigen deden het 'wiskundiger'. Zet die computer nu maar uit, pak het rekenapparaat en tik met ons mee!
De zijden van onze driehoek staan als volgt tot elkaar $1 : \sqrt{3} : 2$.
Stel bijvoorbeeld dat $2(m^2 - n^2) \approx m^2 + n^2$ oftewel $\frac{m}{n} \approx \sqrt{3}$.

We moeten dus voor $\sqrt{3}$ een benaderingsbreuk $\frac{p_n}{q_n}$ vinden.
Volgens recreatie 641 gaat dat met kettingbreuken.
$\sqrt{3} = 1{,}73205...$ Trek nu het gehele deel (1) eraf en neem het omgekeerde van 0,73205... Dit geeft 1,36602... Daarna begint het proces opnieuw. De getallen voor de komma geven de wijzergetallen $[a_1, a_2, a_3, \ldots] = [1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots]$ Er geldt nu:

$p_1 = a_1$ $\quad q_1 = 1$
$p_2 = a_2\, a_1 + 1$ $\quad q_2 = a_2$
$p_n = a_n\, p_{n-1} + p_{n-2}$ $\quad q_n = a_n\, q_{n-1} + q_{n-2}$

Het rekenapparaat nog bij de hand? Dan is de volgende tabel snel te maken:

a_n	p_n/q_n	$p_n^2 - q_n^2$	$2p_nq_n$	$p_n^2 + q_n^2$
1	1/1	-	-	-
1	2/1	3	4	5
2	5/3	16	30	34
1	7/4	33	56	65
2	19/11	240	418	482
1	26/15	451	780	901
2	71/41	3360	5822	6722
1	97/56	6273	10864	12545
2	265/153	46816	81090	93634
1	362/209	87363	151316	174725

Stellen we $2 \cdot 2\,mn \approx m^2 + n^2$, dan vinden we $\frac{m}{n} \approx 2 + \sqrt{3}$.
Dit levert echter dezelfde driehoeken op!

Jos Remijn (5), Den Haag ging heel ver: hij kreeg zijden waarbij de getallen uit 20 cijfers bestonden!

Ditmaal staat bovenaan de puzzelladder met 53 punten:

Hessel Pot
Tournoysveld 67
3443 ER Woerden

Hartelijk gefeliciteerd met de boekenbon van *f* 25,-.



De voorzitter van de NOCW aan het woord

▶ Droog en eenzijdig?

Agnes Verweij

Prijsuitreiking wiskunde-olympiade

Zo'n zeventig mensen kwamen op vrijdag 19 november bijeen in een zaaltje van de TU Eindhoven voor de prijsuitreiking van de 23e Nederlandse Wiskunde-olympiade. Het was een gemêleerd gezelschap: de voor de olympiade verantwoordelijke Nederlandse Onderwijs Commissie voor Wiskunde (NOCW), enkele vertegenwoordigers van sponsors, de jury, de tien prijswinnaars met hun familieleden, een aantal wiskundeleraren, oud-olympiadewinnaars, en nog een handjevol anderen.

Welkomstwoorden werden gesproken door professor Rem, decaan van de faculteit Wiskunde en Informatica van de TU Eindhoven. Hij noemde het coördineren van de wiskunde-olympiade een van de manieren waarop zijn faculteit de 'topsporters van de wiskunde' stimuleert. Hij maakte er geen geheim van dat hij hoopt daarmee ook wat meer jonge mensen te interesseren voor een wiskundestudie in Eindhoven.
De voorzitter van de NOCW, professor Duparc, noemde in zijn inleiding drie noodzakelijke voorwaarden om tot de wiskunde-top te kunnen behoren: enthousiasme, aanleg en hard werken. Hij benadrukte de cruciale rol van de leraar bij het enthousiasmeren, waaraan ook het tijdschrift Pythagoras het nodige kan bijdragen. Daarna reikte hij de getuigschriften uit. Duparc maakte er een leuke voorstelling van door iedere prijswinnaar een interviewtje af te nemen: 'wat ga je studeren?', 'waar?', 'is je wiskundeleraar in de zaal?'. Vijf van de tien winnaars zeiden wiskunde te gaan studeren: slechts één in Eindhoven trouwens, de anderen in Twente (2x), Utrecht en Oxford. De enige vijfdeklasser onder de prijswinnaars wist het nog niet, de overigen kozen voor natuurkunde (2x), econometrie en geneeskunde. De meesten bleken hun wiskundeleraar meegebracht te hebben. 'Ook als u er niets aan gedaan hebt, toch gefeliciteerd', voegde Duparc een van hen opgeruimd toe.
Vervolgens sprak mevrouw Ruygrok zeer uitvoerig over de veelzijdigheid van haar werk als wiskundige bij Shell, een van de sponsors. Zij bood de winnaars van de eerste drie prijzen een presentje aan: een medaille, en ook nog een heuse oliedruppel, gevat in een kubusje van acryl.
De heer Vermeulen, redacteur van het tijdschrift Natuur en Techniek, gaf alle tien de winnaars een boek uit de Wetenschappelijke Bibliotheek van zijn tijdschrift. Hij vestigde de aandacht op de puzzelrubriek in Natuur en Techniek die eenmaal per drie maanden gewijd is aan een (variant van) een wiskunde-olympiade-opgave.

Ten slotte kreeg het jurylid Donkers, die ook de training van de Nederlandse deelnemers voor de Internationale Wiskunde-olympiade verzorgt, het woord. Hij sprak heel enthousiast over de lesbrieven en het trainingskamp waarvoor de prijswinnaars, en nog enkele anderen met opvallend goede resultaten, zijn uitgenodigd. Van het resultaat van de training,

en niet van de bij de eerste twee ronden behaalde aantallen punten, hangt af welke zes deelnemers volgend jaar mee mogen naar Hongkong. Eén ding is nu al duidelijk: er zal geen meisje bij zijn. Het is alweer vier jaar geleden dat er een meisje onder de topscorers van de Nederlandse olympiade te vinden was.

Tweede-prijswinnaar kiest niet exact

Ik praat nog wat na met de prijswinnaar die geneeskunde wil gaan studeren. Hij won de tweede prijs: Henk Boluijt, leerling van de zesde klas vwo van de Reformatorische Scholengemeenschap 'Guido de Brès' in Rotterdam. Henk, die vorig jaar de 10e plaats bereikte in de tweede ronde, zegt dat hij al in de vierde klas door zijn wiskundeleraar enthousiast gemaakt is voor de olympiade. Van het tijdschrift Pythagoras heeft hij toen alleen wat oude nummers gezien. Op zijn school dacht men namelijk tot voor kort dat Pythagoras niet meer bestaat!
Henk vindt wiskunde A en B allebei leuke vakken. Van A waardeert hij vooral de statistiek en bij B vindt hij het interessant als er nieuwe theorie behandeld wordt, zoals destijds het differentiëren en integreren en in de zesde het parametriseren van krommen. De olympiade-opgaven, die veel verder gaan dan de schoolstof, vindt hij uitdagend. Hij denkt dat je voor die opgaven vooral aanleg nodig hebt, en natuurlijk oefening. Henk verheugt zich op de training voor de Internationale Olympiade.



Prof. Duparc feliciteert Henk Boluijt, winnaar van de tweede prijs

Bij het horen van al deze loftuitingen begrijp ik steeds minder waarom hij geen wiskunde gaat studeren. Als ik het hem vraag, komt voor mij dé verrassing van de middag; hij zegt: 'Wiskunde vind ik te droog!'. En hij voegt er aan toe dat hij zich niet voor de komende 40 jaar durft vast te leggen op een zo eenzijdige richting als wiskunde; binnen de geneeskunde denkt hij veel meer keuzemogelijkheden te hebben.

Wiskunde als studie- en werkterrein droog en eenzijdig? Hoe komt zo'n jongen daar nu bij? Wat is er dan toch mis met de beeldvorming van de wiskunde na de middelbare school? Aan de sprekers van deze middag heeft het in elk geval niet gelegen. Een enkeling mocht eens wat verstrooid overkomen: Donkers, toen hij vergat zijn cadeautjes aan te bieden en daarvóór Duparc, toen hij tegen de lamp van de overheadprojector begon te spreken in plaats van in de microfoon. Maar droog en eenzijdig? Dát beeld riepen zij niet op!



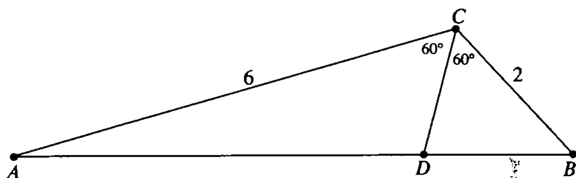
De prijswinnaars en hun wiskundeleraren

Bijdragen

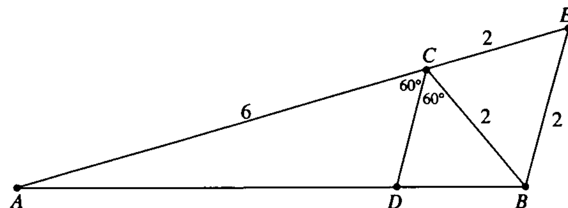
Kijk en zie!

J. van de Craats

In het januarinummer van dit jaar schrijft P.A. Hoogendoorn over een meetkundevraagstuk dat naar zijn gevoel een schoonheidsprijs verdient: gegeven driehoek ABC met een tophoek $C = 120°$ en opstaande zijden $AC = 6$ en $BC = 2$, bepaal dan de lengte van de bissectrice CD.



In zijn bewijs gebruikt hij twee maal de bissectrice-stelling, en dat ligt gezien de vraagstelling ook wel voor de hand, maar ik denk dat je de 'schoonheid' van het bewijs nog kunt vergroten door de figuur op zo'n manier aan te vullen dat je het antwoord direct ziet, dat wil zeggen zonder een beroep te doen op een stelling waarvan je het bewijs misschien niet meer helemaal paraat hebt. De truc is om een gelijkzijdige driehoek aan een van de opstaande zijden, bijvoorbeeld BC, vast te plakken. De punten A, C en E liggen dan op één lijn, en omdat BE en DC evenwijdig zijn, leert de gelijkvormigheid van de driehoeken ADC en ABE je direct dat $DC = (AC : AE) \times BE = (6 : 8) \times 2 = 1{,}5$.



De afmetingen 6 en 2 voor de opstaande zijden zijn natuurlijk niet van wezenlijk belang: bij zijden $AC = b$ en $BC = a$ krijg je $ab/(a + b)$ als lengte van de bissectrice.

In wezen gebruik je hier hetzelfde idee als bij het eenvoudigste bewijs van de algemene bissectrice-stelling: snijd het verlengde lijnstuk AC met de lijn door B evenwijdig aan de bissectrice DC. Het enige verschil is dat driehoek BCE dan *gelijkbenig* wordt en niet gelijkzijdig.

Te veel jongens!

R. Dijxhoorn

In Euclides 69-5 schrijft de heer H. Stuurman over wiskunde B voor het vwo. Het door hem gestelde is mij uit het hart gegrepen.
Ook mijns inziens zou het een ramp voor het wiskunde B-onderwijs zijn als we de kant opgaan van wiskunde A-achtige stof en/of -opgaven.
De her en der nogal eens geventileerde klacht dat het wiskunde B-programma te veel kunstjes zou bevatten, snijdt naar mijn mening geen hout, en deze klacht wordt zeker niet ondervangen door de voorgestane remedie. Immers, als er ergens sprake is van kunstjes, dan is het wel bij het onderwijs volgens het wiskunde A-programma!

Dat is natuurlijk nooit de bedoeling van de opstellers van die leergang geweest, maar voor elke schoolmeester was het van het begin af duidelijk dat dit zou gaan gebeuren.
Daarbij komt, zoals ook de heer Stuurman betoogt en velen dat met hem doen, dat het wiskunde B-programma goed in elkaar zit, al is het wat overladen. Maar aan dit laatste valt best wat te doen.
Ook de opmerkingen in het artikel gemaakt betreffende veranderingen in het wiskunde A-programma, zoals het de opgaven ontdoen van grote lappen tekst en het meer centraal stellen van de wiskunde, bijvoorbeeld door het meer oefenen van wiskundige vaardigheden, kan ik volledig onderschrijven. En wat meisjes en wiskunde betreft het volgende.
Ik aarzel een wat beladen zin aan het papier toe te vertrouwen, maar sommige van mijn beste leerlingen waren meisjes, en ik ben er van overtuigd dat dit voor veel van mijn collega's net zo geldt. De eenvoudige constatering dat veel meer meisjes dan jongens (vooral) wiskunde B laten vallen, ligt mijns inziens aan het feit dat meisjes eerder geneigd zijn geen wiskunde te kiezen dan jongens, wanneer zij de raad krijgen dat vak niet in hun pakket op te nemen. Dit laatste op grond van magere resultaten. Anders gezegd: niet te weinig meisjes kiezen wiskunde B, maar te veel jongens, en met dat 'te veel' bedoel ik die jongens die te weinig aanleg voor dat vak hebben, dan wel het er niet voor over hebben om er keihard voor te werken, mocht dat nodig zijn. Het argument is dan altijd: "Ik heb het nodig voor mijn vervolgopleiding".
Het artikel van de heer Stuurman eindigt met een aantal aanbevelingen. Ik ben het er mee eens, met de aantekening dat we vooral moeten gaan praten over de vraag wèlke onderwerpen we precies moeten laten vallen of verlichten.

● 40 jaar geleden ● ●

Exacte vakken aan de M.M.S.

Dan wilde ik graag nog iets zeggen over het onderwijs in de exacte vakken aan de M.M.S.
Mij werd destijds, aan 't begin van mijn loopbaan als lerares, voor mijn lessen Scheikunde aan een M.M.S.-afdeling door de directrice gezegd: 'Tracht de meisjes bij hun geestelijke nekvel te grijpen en ze omhoog te tillen.' Na enige jaren Scheikunde-onderwijs werden me de lessen voor Wiskunde in een 1e klasse meisjes opgedragen. En hiermee beginnend, vroeg ik me af: 'Ik was toch vroeger ook een meisje en heb het toch ook gekund. Nu ja, in déze richting had ik dan waarschijnlijk meer aanleg. Maar zou het verstand van déze meisjes nu zo volkomen anders gebouwd zijn?' Ik kon me dat niet voorstellen. Al lesgevende, rustig trachtend mij in te stellen op de meisjes, drong het tot me door: juist door dit werk kan je de meisjes op Middelbaar Onderwijs-niveau brengen.
De heer Krooshof sprak er over de Wiskunde te behandelen als spel. Maar voor de Wiskundige is dit vak toch ook van belang als *denk*spel! Ook als zodanig, als denkspel, kan dit met meisjes bedreven worden. De exacte redenering, juist in de Meetkundeles, zelfs in de 1e klasse, mits gegeven in kinderlijke taal, je volledig instellend op haar gedachtengang, op haar tempo, is mogelijk, ook in een meisjesklasse. Ik denk aan het geval, dat in één van de vorige referaten naar voren kwam: $A = B$, $C = B$, dus $A = C$. Je komt in de Meetkunde dit als moeilijkheid tegen. Maar men kan dan even overgaan op gewone dingen uit het dagelijks leven: 'Alice heeft evenveel bonbons als Nel, Annie heeft evenveel bonbons als Nel; wat weet je van de bonbons van Alice en Annie? ... Begrepen? ... Hoe is het dan met A, B en C?'
Zo werd me vroeger eens gevraagd, toen ik het woord 'conclusie' gebruikte (1e klasse): 'Wat is dat, een conclusie?' Er over gepraat. Een voorbeeld uit het gewone leven gegeven. Bedenk jullie nu ook eens zo'n voorbeeld.

Mej. Ir. E. Landeweer op een discussiebijeenkomst, geciteerd in Euclides 29 (1953-1954).

▶ Verantwoording

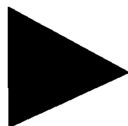
In jaargang 68 zijn we van start gegaan met een door Bram Lagerwerf geschreven serie over het wiskunde-onderwijs in de onderbouw, na de invoering van het nieuwe leerplan. In jaargang 69 verschenen in de nummers 1 en 2 twee afleveringen uit deze serie.
Daarmee was de serie niet af; er zouden nog twee of drie afleveringen moeten volgen. Niettemin hebben we besloten de serie niet voort te zetten. De reden hiervan is dat we met Bram Lagerwerf over de vorm en de inhoud van de laatste bijdragen geen overeenstemming hebben bereikt.
Wij betreuren dat de serie aldus geëindigd is.

De redactie

Het afbreken van de serie *Ontwikkelingen in de didactiek*

Over de laatste drie artikelen in deze serie is onenigheid ontstaan. Na enig heen en weer geschrijf en gepraat met de hoofdredacteur voelde ik me zo getergd en gekwetst dat ik van verdere onderhandelingen over de inhoud van deze artikelen heb afgezien. De redactie heeft toen besloten deze laatste artikelen niet te plaatsen. Ik voel me als auteur en als lid van de vereniging tekort gedaan.

Bram Lagerwerf



Boekbespreking

H.A. Lauwerier: *Modellen met de microcomputer, experimentele wiskunde*, Epsilon uitgaven, deel 12 (2e druk), Utrecht 1990, *f* 32,50, 208 blz.

In de serie Epsilon Uitgaven is van de hand van prof. H.A. Lauwerier een derde deeltje over wiskunde met de microcomputer verschenen. De voorgaande delen gingen resp. over analyse en meetkunde met de micro. Het nu voorliggende deel draagt de titel *Modellen met de microcomputer*. Met dit boek wil de auteur laten zien hoe het met de komst van de microcomputer mogelijk is geworden om te experimenteren met wiskundige modellen.

Het boek begint met een inleiding over iteratieve processen en numerieke integratie van differentiaalvergelijkingen, onderwerpen die op dit moment in de middelbare schoolstof niet voorkomen. Daarna komen de toepassingen, die voornamelijk afkomstig zijn uit de natuurkunde en de biomathematica. Een greep uit de natuurkundige modellen: verlies van lichtsterkte bij mist, de veerkracht van een veer, de mathematische slinger, de vallende parachutist, het piepende krijtje, regeling met een thermostaat, elektrische schakelingen. De meeste aandacht gaat echter uit naar de biomathematica. Om te beginnen is er een hoofdstuk over groeimodellen, waarbij het model voor exponentiële groei dient als vertrekpunt voor de behandeling van allerlei varianten. Geremde groei en periodiciteit spelen hierbij een rol. De onderwerpen naar context zijn: wereldbevolking, visvangst, walvissen, vervuiling, en, heel verrassend, cellulaire automaten. Daarna volgen respectievelijk hoofdstukken over Prooi-roofdier systemen (onder andere over insectenbestrijding), Klok en hart (de pacemaker) en Epidemieën.

Bij de modellen die behandeld worden is naast de wiskundige formulering steeds een computerprogramma opgenomen, dat de lezer gemakkelijk zelf kan intypen. Hierdoor is het mogelijk om zelf met de modellen te experimenteren door beginwaarden, stapgroottes en parameters te veranderen. De programma's zijn geschreven in Basic en ontdaan van franje nooit langer dan zo'n twintig regels. Verder is aan het eind van ieder hoofdstuk een aantal opgaven opgenomen. De uitwerkingen daarvan ontbreken.

Al met al een boek waar veel in staat. Voor scholieren van de hoogste klassen vwo lijkt het me te moeilijk, maar voor geïnteresseerde docenten en studenten uit hbo of wo is het z'n prijs meer dan waard.

Heleen Verhage

● Verenigingsnieuws ●

▶ Van de bestuurstafel

Marian Kollenveld

Regionale bijeenkomsten

De regiobijeenkomsten in februari jongstleden waren een groot succes. In Rotterdam, Amsterdam, Zwolle en Eindhoven kwamen in totaal ruim 400 leden naar deze bijeenkomsten. Deze opkomst overtrof de verwachting met meer dan 100%. Dat plaatste de organisatie voor wat problemen, maar uiteindelijk is alles redelijk gladjes verlopen. We gaan hier zeker mee door, vooral omdat uit de ingeleverde evaluatieformulieren bleek dat op deze bijeenkomsten ook veel leden komen, die normaal niet of zelden naar de andere bijeenkomsten van de Vereniging gaan.

Over het gebodene werd in het algemeen positief geoordeeld. Aardig is dat hierbij de heel ouderwetse doceervorm: de man met een krijtje (nu overheadprojector) en een enthousiast verhaal over dit keer het meetkunde-onderwijs evenzeer gewaardeerd werd als de wat meer nieuwerwetse vormen; deze laatste kon men zien en beluisteren bij de bestuurswerkgroep over examens of de werkgroepen over de toetsing van de basisvorming of de timmervrouw met haar bak spijkers.

Wat ons vooral heeft getroffen is dat deze bijeenkomsten kennelijk voorzien in een behoefte van veel docenten om kennis te nemen van ontwikkelingen op het terrein van het wiskunde-onderwijs. De werkgroep over het toetsen van de basisvorming was niet toevallig overal ernstig overtekend. Hierover bestaat veel onduidelijkheid en onzekerheid, die in de werkgroep niet weggenomen kon worden omdat nog veel niet duidelijk is, maar waarbij hopelijk wel wat meer inzicht verschaft is over de inhoud, de vorm en het relatieve gewicht van deze toetsen.

Hoe verder?

De afgelopen jaren hebben de verzorgingsinstellingen zoals het APS en de SLO, de hogescholen en ook de Samenwerkingsgroep 12-16 en het Freudenthal instituut zich steeds belangeloos ingezet voor de studiebijeenkomsten van de Vereniging. We hebben dat uiteraard zeer op prijs gesteld, maar of dat in de toekomst mogelijk blijft is een open vraag, nu de gelden voor de nascholing naar de scholen gaan en niet meer zoals voorheen naar de verzorgingsinstellingen. Per volledige baan is dit jaar zo'n *f* 700,- aan de scholen beschikbaar gesteld voor nascholing. Het lijkt dan niet onredelijk om voor de studiebijeenkomsten een -door de school te betalen- bijdrage te vragen, zodat de mensen die zich inzetten ook betaald kunnen worden voor hun werk.

Oproepen

Derde Wereld-fonds
Op de jaarvergadering is op initiatief van de heer H. Wisbrun het voorstel aangenomen om een vrijwillige bijdrage te vragen van *f* 5,- voor steun aan het wiskundeonderwijs in Derde Wereld-landen. Daarom willen wij een commissie van wijzen instellen die het bestuur adviseert over de bestemming van deze gelden. Belangstellenden met enige deskundigheid op dit gebied wordt vriendelijk verzocht zich bij de secretaris te melden.

Rekenen
In samenwerking met de NVORWO (zie Euclides van januari 1994) starten we een werkgroep die zich gaat bezighouden met het rekenonderwijs. Ook hiervoor zijn belangstellenden van harte welkom.

Verenigingsnieuws



Jaarrede 1993

Het is bijna een jaar geleden dat ons erelid Prof.dr. O. Bottema is overleden. Talrijk zijn de interessante artikelen die hij voor ons in Euclides heeft geschreven. Een selectie van vijftig 'verscheidenheden' werd in 1977 door onze vereniging in boekvorm uitgegeven. Serieus, speels, amusant, vaak met boeiende interessante meetkundige problemen en zeker ook met waardevolle informatie uit de geschiedenis van de wiskunde.
Enige maanden geleden is een andere auteur van boeiende wiskunde- en natuurkunde-artikelen overleden. Henk Mulder heeft jaren lang voor de tijdschriften Pythagoras en Archimedes heel veel leuke leerzame artikelen geschreven zowel voor docenten als voor leerlingen.
Wij zullen nog lang terugdenken aan deze uiterst bekwame mensen.

Professor Bottema ontdekte bij een van zijn vele speurtochten door de oude literatuur dat bij veel rijmelarij wiskundige elementen gebruikt werden. In het kader van het voor de Bavo belangrijke zelfontdekkend leren noem ik hier het volgende vers:

Een hoofdonderwijzer uit Rauwerderhem
Wist niets van Euler (en die niets van hem),
Maar ontdekt tot zijn glorie
Aposteriori
Het collineair zijn van H, Z en M.

Onlangs is er in de wereld van de wiskundigen een zeer opmerkelijke prestatie geleverd. De Engelse wiskundige Andrew Wiles heeft een bewijs gevonden voor het vermoeden van Fermat. Het is leuk om te weten dat het een soort bewijs uit het ongerijmde is. Misschien is dit een goede tip voor de commissie die bezig is het vwo-B programma te herzien.
Het vorige week in Utrecht georganiseerde congres over dit bewijs was een succes, zeker ook omdat het door vele honderden jonge mensen werd bezocht. Het initiatief om leerlingen van 5 en 6 vwo toe te laten en zelfs een op hen afgestemd programma te geven verdient veel lof.

Het afgelopen cursusjaar is een revisiecommissie bezig geweest om alle mavo/vbo-examenprogramma's C en D te herschrijven. Zij koos daarbij voor een uniforme structuur voor alle vakken. Helaas bleek in de raadplegingsversie dat de inhoud ondergeschikt gemaakt was aan de structuur. Er ontbrak noodzakelijke toelichting en vele eindtermen kregen een andere inhoud. Samen met leden van de voormalige Commissie Ontwikkeling Wiskundeonderwijs (COW) heeft het bestuur het 'onaanvaardbaar' uitgesproken over de concept-voorstellen. Gelukkig zijn de voorstellen dankzij een kleine groep mensen die in korte tijd veel werk verzet hebben, naar tevredenheid bijgesteld. De inhoud is nu weer conform de bedoelingen van de COW, die reeds een grote veldlegitimering verkregen hebben.
Tijdens de overhandiging van deze bijgestelde voorstellen aan de minister hebben de wiskundeprogramma's een zeer groot compliment gekregen. Met name bleek dat alleen bij de wiskunde het verschil in C- en D-niveau goed met criteria was onderbouwd. De leden van de COW en onze woordvoerders bij de COW en bij de gesprekken met de revisiecommissie zeggen wij veel dank voor het vele werk dat geleid heeft tot de pluim die de wiskunde heeft gekregen.

Zoals in veel steden het wegennet plotseling is overspoeld met rotondes, zo is in onderwijsland kennelijk de noodzaak om meer en meer structuur aan te brengen een nieuwe rage. Rotondes kunnen zeer nuttig zijn maar ook veel verwarring en oponthoud veroorzaken. De structuur van de nieuwe commissies Veld Advisering Leerplan Ontwikkeling (de VALO's) geeft ook verwarring over de vraag of de vakinhoudelijke verenigingen nog wel voldoende

inbreng zullen behouden bij die veldadvisering. Tot nog toe hadden wij een beslissende stem bij de benoeming van de leden van de VALO's maar nu ontdekken we in het reglement slechts de tekst:
...bij de benoeming van leden van de beleidscommissie zal kennis genomen worden van het overleg met de veldorganisaties.

Het bestuur heeft ook grote zorgen wat betreft de opzet van de besteding van de nascholingsgelden. De kwaliteit van de nascholing is niet altijd gebaat bij te grote commerciële krachten. Helaas is het nu mogelijk dat directies van scholen in zullen gaan op ogenschijnlijk aantrekkelijke aanbiedingen waarop de vakinhoudelijke verenigingen weinig invloed gehad hebben.

Vorig jaar heeft Nellie Verhoef op de studiedag een eerste demonstratie gegeven van een ontwerp voor een interactieve CD over ruimtemeetkunde. De belangstelling van docenten voor dit nieuwe medium was zo groot dat de Christelijke Hogeschool Windesheim uit Zwolle heeft besloten met de ontwikkeling van de interactieve CD voort te gaan. Om subsidie van de overheid te krijgen is de Hogeschool een samenwerkings-verband aangegaan met de uitgeverij NIB en de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. De rol van onze vereniging hierbij is het leveren van een klankbordgroep die bestaat uit docenten wiskunde die het project vanuit het veld zullen gaan begeleiden. Het bestuur nodigt belangstellenden voor deze klankbordgroep uit, om tijdens deze studiedag of in de komende maanden, hierover contact met een van de bestuursleden op te nemen.

Op 5 november 1993 is het Centrum voor Vrouwen en Exacte Vakken in Utrecht-Lunetten geopend. Onze Werkgroep Vrouwen en Wiskunde heeft samen met de Werkgroep Vrouwen en Natuurwetenschappen van het NVON het voortouw genomen wat betreft een nuttig samenwerkingsverband, zoals mogelijk later op groter schaal te verwachten is. Tijdens de opening is o.a. aan mevr. drs. N.J. Ginjaar-Maas het eerste exemplaar van het boek 'Wiskunde en Werk' aangeboden. Het boek bevat het uitgewerkte materiaal van het zeer geslaagde lustrum van de werkgroep in maart 1992. Wij wensen de werkgroepen veel succes met het centrum.

De nog altijd verontrustende cijfers wat betreft de keuze van exacte vakken door meisjes, in vergelijking met andere landen, alsmede de resultaten die meisjes in deze vakken halen, zullen mogelijk door inspanningen van het centrum gunstiger worden.

Gaarne dank ik vanaf deze plaats het Proces Management Basisvorming (PMB) voor de subsidie die wij gekregen hebben o.a. in verband met de organisatie van deze studiedag, die voor een belangrijk deel tot doel heeft U een stapje verder te brengen in het proces van de basisvorming.

Met veel hulp van medewerkers van het APS zullen wij vandaag kijken hoe men een basis vormt. Auteurs van leerboeken zijn ons op deze weg voorgegaan maar U zult het met mij eens zijn dat een docent geen slaaf van een boek of methode mag worden.

Met het nieuwe Wiskunde 12-16 progamma is het uiterst belangrijk dat elke docent zich bewust is van het doel en de noodzakelijke diepgang van het te geven onderwijs aan zijn/haar leerlingen.

Helaas zijn er te veel andere zorgen die de docenten in het veld bezig houden, zoals b.v. fusies, communicatieproblemen i.v.m. de grotere secties en te grote klassen zelfs bij het vbo. We zullen allemaal moeten leren werken met het TVS-model van toepassingen, vaardigheden en samenhang. Niveaubewaking in elk schooltype is geboden en dit betekent dat we allemaal waar nodig bij moeten sturen in onze pogingen om de basisvorming tot een succes te maken.

Zoals u al gezien hebt in de u toegezonden kalender, zullen er ook deze cursus regionale bijeenkomsten georganiseerd worden. Leden die mee willen helpen bij de organisatie, of suggesties hebben voor het programma of de inhoud van de workshops, zullen wij met dankbare gevoelens ontvangen. Wij zijn o.a. nog op zoek naar actuele onderwerpen voor het mbo en het hbo.

Met zeer veel genoegen kunnen wij voor het eerst op een jaarvergadering melden dat het vakblad Euclides niet alleen ons orgaan maar ook ons eigen-

dom is. De redactie is al geruime tijd zeer ijverig bezig met plannen voor de eerste jaargang nieuwe stijl in de cursus 1994/1995. Het zal tevens een jaargang zijn in de aanloop van het 70-jarig bestaan van onze vereniging in 1995. Wij hopen dat lustrum op een bijzondere wijze te vieren. De redactie van Euclides zal straks zelf over haar enthousiaste plannen voor de nieuwe jaargang vertellen.

Gaarne wens ik iedereen een prettige en leerzame dag toe.

Examenbesprekingen mei 1994

Alle docenten wiskunde worden uitgenodigd één of meer examenbesprekingen bij te wonen. Niet overal is de bijeenkomst op hetzelfde adres als vorig jaar. Voor het vastleggen van het schema van de bijeenkomsten zijn we afhankelijk van de examendata. Er is naar gestreefd zo snel mogelijk na het examen de bijeenkomsten te houden.

Examenbesprekingen wiskunde mavo/vbo C/D op dinsdag 24 mei 1994 van 15.30 u - 17.30 u te:

Plaats	Gespreksleiders *)
ALKMAAR OSG Willem Blaeu Robonsbosweg 11 072-122477	1 T.L.J. Dunselman 075-284042 2 Mw. C. Gaykema 020-6129185
HAREN Zernike College Westerse Drift 98 050-344000	1 S. Kooiman 050-251289 2 J. Borst 05960-12426
LEEUWARDEN SG De Delta Nylândsdyk 4 038-883377	1 J. Tuinstra 2 J. Tuinstra 05133-2657
ROTTERDAM SG Henegouwerplein Henegouwerplein 14-16 010-4774533	1 F.A. van Dijken 2 F.A. van Dijken 01858-16857
TILBURG Boerke Mutsaers Vijverlaan 2 013-670693 (NS Tilburg West)	1 F.J. Mahieu 2 F.J. Mahieu 04116-73468
UTRECHT K.S.G. Lunetten Kampereiland 6 030-883551 (NS Utrecht-Lunetten)	1 R.J. Roukema 2 R.J. Roukema 03465-60429
ZWOLLE Thorbecke SG Dr. van Heesweg 1 038-546677	1 G. Hoogendoorn 038-538262 2 Mw. A. Wajer-de Graauw 03412-62445

*) 1: C-examen,
2: D-examen

Examenbesprekingen wiskunde voor havo-A op dinsdag 24 mei 1994 van 16.00 u - 18.00 u te:

Plaats	Gespreksleiders *)
AMSTERDAM Sweelinck College Moreelsestraat 21 020-6625697	S.Th. Min 02290-37756
AMERSFOORT Gymn. Joh. v. Oldenbarneveldt Thorbeckeplein 1 033-613944	Drs. P.G.M. Kop 01726-14082
ARNHEM Thorbecke S.G. Thorbeckestr 17 085-423028	Drs. W. Kremers 08373-18206
GOES Buys Ballot College Patijnweg 50 01100-13010	A. Ruijgt 01102-43963
's-GRAVENHAGE St. Janscollege Colijnplein 9 070-3687670	J.P.C. van der Meer 01742-97138
GRONINGEN Rölingcollege Melisseweg 2 050-421000	Drs. J. Tolboom 050-275494
ROTTERDAM SG Henegouwerplein Henegouwerplein 14-16 010-4774533	R.E. Houweling 01803-15302

TILBURG Boerke Mutsaers Vijverlaan 2 013-670693 (NS Tilburg West)	Ir. W.J.M. Laaper 040-867720
ZWOLLE Vd Capellen SG Lassuslaan 230 038-225202	L.T.J. Mahieu 038-540414

Examenbesprekingen wiskunde vwo-A op dinsdag 24 mei 1994 van 18.30 u - 20.30 u te:

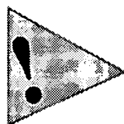
Plaats	Gespreksleider
AMSTERDAM Sweelinck College Moreelsestraat 21 020-6625697	Mw. drs. G.W. Fokkens 020-6438447
AMERSFOORT Gymn. Joh. v. Oldenbarneveldt Thorbeckeplein 1 033-613944	L. Sijp 02159-44182
ARNHEM Thorbecke SG Thorbeckestraat 17 085-423028	Mw. drs. E.M.H. v.d. Berg-de Both 080-551414
GOES Buys Ballot College Patijnweg 50 01100-13010	Drs. S.H.P. Garst 01874-2177
's-GRAVENHAGE St.Janscollege Colijnplein 9 070-3687670	J.P.C. van der Meer 01742-97138
GRONINGEN Rölingcollege Melisseweg 2 050-421000	H.H.C. Pentinga 05909-1528
ROTTERDAM CSG Henegouwerplein Henegouwerplein 14-16 010-4774533	C. Rijke 078-194286
TILBURG Boerke Mutsaers Vijverlaan 2 013-670693 (NS Tilburg West)	Drs. J. Verboom 04168-3559
ZWOLLE Vd Capellen S.G. Lassuslaan 230 038-225202	L.T.J. Mahieu 038-540414

Examenbesprekingen wiskunde havo-B op vrijdag 27 mei 1994 van 16.00 u - 18.00 u te:

Plaats	Gespreksleider
AMSTERDAM Sweelinck College Moreelsestraat 21 020-6625697	Drs. J.P. Muthert, 02903-3330
AMERSFOORT Gymn. J. v. Oldenbarneveldt Thorbeckeplein 1 033-613944	W.A.M. van Bunnik 030-517946
ARNHEM Thorbecke SG Thorbeckestraat 17 085-423028	Drs. P.J.F.M. v.d. Berg
GOES Buys Ballot College Patijnweg 50 01100-13010	Drs. S.H.P. Garst 01874-2177
's-GRAVENHAGE St.Janscollege Colijnplein 9 070-3687670	Drs. C.D. Hendriks 01740-20131
GRONINGEN Rölingcollege Melisseweg 2 050-421000	Drs. M. van Steenis 05908-18121
ROTTERDAM CSG Henegouwerplein Henegouwerplein 14-16 010-4774533	E.J. van Dongen 010-4672130
TILBURG Boerke Mutsaers Vijverlaan 2 013-670693 (NS Tilburg West)	C.J.M. Nienhuis 04116-78501
ZWOLLE Vd Capellen SG Lassuslaan 230 038-225202	J.P. Scholten 053-768791

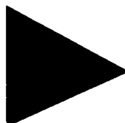
Examenbesprekingen wiskunde voor vwo B op woensdag 1 juni 1994 van 16.00 u - 18.00 u te:

Plaats:	Gespreksleider:
AMSTERDAM Sweelinck College Moreelsestraat 21 020-6625697	A. Holleman 02518-54913
AMERSFOORT Gymn. J. v. Oldenbarneveldt Thorbeckeplein 1 033-613944	Drs. M.J.F.M. Voorhoeve 030-936166
ARNHEM Thorbecke SG Thorbeckestraat 17 085-423028	A.J.J. Kersten 080-582041
's-GRAVENHAGE St.Janscollege Colijnplein 9 070-3687670	Mw.drs. M. Kollenveld 070-3904867
GRONINGEN Rölingcollege Melisseweg 2 050-421000	Drs. M. van Steenis 05908-18121
ROTTERDAM SG Henegouwerplein Henegouwerplein 14-16 010-4774533	B.L.G.P. Hillebrand 01807-15210
TILBURG Boerke Mutsaers Vijverlaan 2 013-670693	A.L.P. van Merode 01623-137461
ZWOLLE Vd Capellen SG Lassuslaan 230 038-225202	C. Bouwer 03410-16627



Kalender

18 mei 1994: Utrecht, Lezing over het Fermat-vermoeden, zie Euclides 69-4 bladzijde 120.
18 mei 1994: Utrecht, Bestuursvergadering NVvW.
24, 27 mei en 1 juni 1994: Diverse plaatsen, Examenbesprekingen. Zie bladzijde 222.
16 september 1994: Eindhoven, tweede ronde Wiskunde Olympiade in de Technische Universiteit.



Mededeling

Aankondiging

Extra voorlichtingsbijeenkomst informatietechnologie wiskunde.

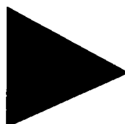
Doelgroep
Deze bijeenkomst is bedoeld voor wiskundedocenten van (i)vbo tot vwo, die breed geïnformeerd willen worden over computergebruik in het nieuwe leerplan, nieuwe software en bijbehorend lesmateriaal.

Programma
Het programma bestaat uit een plenaire presentatie over de stand van zaken. Daarin wordt aandacht besteed aan de computer in het nieuwe leerplan, het computerpracticum, de computer als demonstratiemiddel en de 'meerwaarde' van de computer bij wiskunde. Daarna is er twee keer een werkgroep, waarin de cursist zelf met de computer aan het werk kan.
Het cursusboek *'Computergebruik in basisvorming wiskunde'* bevat naast achtergrondinformatie een overzicht van bruikbare software en leermiddelen.

Datum/plaats
Tijd: 15.00 - 18.00 uur
Woensdag 20 april 1994: Utrecht

Kosten
f 50,00 inclusief lesmateriaal

Inlichtingen
Voor meer informatie kunt u contact opnemen met het
Algemeen Pedagogisch Studiecentrum
Informatiepunt wiskunde
Zwarte Woud 2
3524 SJ Utrecht
Tel. 030 - 856721/856722



Adressen van auteurs

M. Abels, Freudenthal instituut, Tiberdreef 4, 3561 GG Utrecht
H. Bakker, Jan Steenstraat 11, 8932 EA Leeuwarden
F. van der Blij, Ruysdaellaan 6, 3723 CC Bilthoven
J. van de Craats, KMA, Postbus 90154, 4800 RG Breda
R. Dijxhoorn, Heemskerklaan 68, 3742 AM Baarn
M.C. van Hoorn, Noordersingel 12, 9901 BP Appingedam
J. Koekkoek, Stullenbaan 34, 1606 JC Enkhuizen
M.P. Kollenveld, Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk
V.E. Schmidt, Verlengde Grachtstraat 43, 9717 GE Groningen
H. Verhage, Freudenthal instituut, Tiberdreef 4, 3561 GG Utrecht
A. Verweij, Noord Rundersteeg 10, 2312 VN Leiden
G. Zwaneveld, Bieslanderweg 18, 6213 AJ Maastricht
A. Lagerwerf, Dwarsweg 52, 3702 XC Zeist

Inhoud